Zur Rekurrenz von Random Walks

Till Breuer

Diplomarbeit

Betreuer: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik
Westfälische Wilhelms-Universität
Münster

Sommersemester 2010

13. August 2010

Danksagungen

Das Schreiben dieser Arbeit war ein langer, manchmal beschwerlicher, meist aber schöner Weg vielseitiger Herausforderungen. Mein Dank gilt Prof. Dr. Gerold Alsmeyer, für seine Bereitschaft, mich beim Verfassen dieser Arbeit zu betreuen und für seine Hilfe bei der Suche nach einem Thema für die Diplomarbeit. Die Beschäftigung mit dem hier behandelten Thema erlaubte, auch wenn die Arbeit in ihrem Hauptteil sehr technisch anmutet, eine intensive Beschäftigung mit der Wahrscheinlichkeits- und Erneuerungstheorie, in die ich im Laufe des Verfassens eine Menge interessanter Einblicke gewann. Herr Alsmeyer stand mir stets unmittelbar mit fachlicher Unterstützung zur Seite und gab in den gelegentlichen Phasen ausbleibender Erfolgserlebnisse, die auf dem Weg eines (angehenden) Mathematikers auftreten können, entscheidende Hinweise und Motivation.

Außerdem danke ich meinen Freunden für ihre Hilfsbereitschaft, ihre Freundschaft und die schöne Zeit, die ich durch sie in den vergangenen Monaten und Jahren erlebt habe. Insbesondere danke ich meiner Wohngemeinschaft für das sich täglich bietende familiäre und freundschaftliche Umfeld. Jeder einzelne verdient an dieser Stelle die namentliche Erwähnung, stellvertretend danke ich Ben Sahlmüller für Unterstützung in allen Lebenslagen, sowie Anita Prkaçin für die freundliche und ausgeglichene WG-Atmosphäre.

Der größte Dank gebührt Sebastian Mentemeier, der sich stets mit großer Hilfsbereitschaft und fachlicher Kompetenz in komplizierte Sachverhalte eindachte. Durch gemeinsame Diskussionen und seine Anregungen konnte mancher Stillstand im Laufe der Arbeit vermieden werden. Mit seiner Unterstützung trägt er einen nicht unerheblichen Anteil am Abschluss der Arbeit.

Zu guter Letzt danke ich meiner Familie für die geduldige, verständnis- und liebevolle Unterstützung während der ganzen Zeit.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften von Random Walks und insbesondere mit der Frage, wann ein Random Walk rekurrent ist. Das Hauptziel dieser Arbeit besteht im Beweis des folgenden fourieranalytischen Rekurrenzkriteriums im schwierigen Spezialfall eines eindimensionalen nichtarithmetischen Random Walks.

Rekurrenzsatz
Ein Random Walk $(S_n)_{n\geq 0}$ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Zuwachsverteilung Q und zugehöriger Fourier-Transformierter φ ist genau dann rekurrent, wenn

$$\int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) dt = \infty, \qquad \text{(Gl. 1)}$$

wobei $\delta > 0$ beliebig, aber hinreichend klein sei, so dass $|\varphi(t)| < 1$ für alle $0 < |t| \leq \delta$.

In [12] präsentiert F. Spitzer einen Beweis des Rekurrenzsatzes für den Fall arithmetischer Random Walks. Beweise für den Fall eindimensionaler nichtarithmetischer Random Walks wurden parallel von D.S. Ornstein in [11] und von C. J. Stone in [13] erarbeitet. Letzterer wurde im Jahr 1969 veröffentlicht und bildet den Grundstein dieser Arbeit.

Nach einigen Vorbereitungen wird der Beweis in Kapitel 4 ausführlich diskutiert und in Abschnitt 4.4 unter einer Einschränkung bewiesen. In [13] formuliert Stone zugleich den folgenden Satz, mit dessen Beweis wir gleichzeitig den soeben erwähnten Vorbehalt aufheben können.

2. Hauptsatz
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein RW, dessen Zuwachsverteilung die Varianz $\sigma^2 \in (0, \infty]$ besitze. Weiter sei $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass $\varphi(t) \neq 1$ für alle $0 < |t| < \delta$. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{s\uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{it}{1-s\varphi(t)} dt \qquad \text{(Gl. 2)}$$

und ist endlich. Weiter folgt

$$\lim_{y\to\pm\infty}\lim_{s\uparrow 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{ite^{iyt}}{1-s\varphi(t)}dt=\mp\sigma^{-2}. \qquad \text{(Gl. 3)}$$

Diese Arbeit beginnt mit der Zusammenfassung theoretischer Grundlagen über Random Walks und Rekurrenz in **Kapitel 1**. Der zweite Abschnitt des Einführungskapitels wird der Einführung des Erneuerungsmaß unter Erläuterung seiner Bedeutung im Zusammenhang mit der Rekurrenz eines RWs gewidmet. Die dem Beweis der obigen Sätze zugrundliegenden Fakten über die Fouriertransformation befinden sich in **Anhang A**.

Im Anschluss an das Grundlagenkapitel werden wir in **Kapitel 2** den Rekurrenzsatz mit Hilfe des Satzes von Chung und Fuchs motivieren und auf eine Beweisrichtung reduzieren. Daraufhin wird das Problem weiter reduziert, indem gezeigt wird, dass wir von Random Walks ausgehen dürfen, deren Zuwachsverteilung eine $\lambda\!\!\lambda$-stetige Komponente besitzen und die somit insbesondere streng nichtarithmetisch sind.

In **Kapitel 3** werden die beiden Sätze anschließend umformuliert und jeweils auf hinreichende Bedingungen zurückgeführt: Der Rekurrenzsatz wird durch Satz 3.1.3 impliziert, während wir die Gültigkeit des 2. Hauptsatzes durch den Beweis von Satz 3.1.4 erhalten. In den Umformulierungen taucht mit dem Potentialkern Af, den wir in **Abschnitt 3.1** mit Hilfe des diskontierten Erneuerungsmaßes definieren, wieder ein probabilistischer Ausdruck auf. Nach dem Beweis der Gültigkeit der Umformulierungen treffen wir in **Abschnitt 3.3** letzte Beweisvorbereitungen.

Der Beweis der umformulierten Sätze beginnt im Hauptteil dieser Arbeit, **Kapitel 4**, mit dem Spezialfall eines Random Walks, dessen Zuwachsverteilung endliche Varianz besitzt. Der Beweis des allgemeinen Falls erfolgt ab **Abschnitt 4.3**.

Nach dem Hauptteil untersuchen wir in **Kapitel 5**, ob sich eine Verallgemeinerung des Rekurrenzsatzes auf Markov-Random-Walks treffen lässt. Dabei betrachten wir den einfachen Fall von Markov-Random-Walks, deren Steuerkette eine positiv rekurrente Markovkette ist. Für den Fall, dass das stationäre 1. Moment des Markov-Random-Walks existiert lässt sich dabei leicht eine Formulierung des Rekurrenzsatzes finden, deren Nachweis in **Abschnitt 5.3** erfolgt. Wir beschließen die Arbeit in **Abschnitt 5.4** mit einem kurzen Ausblick darauf, wie eine Formulierung des Rekurrenzsatzes im allgemeinen Fall aussehen könnte und besprechen das einfache Beispiel eines Markov-Random-Walks mit alternierender Steuerkette.

1. Random Walks

In diesem Einführungskapitel definieren wir Random Walks und erläutern den Begriff der Rekurrenz. Wir werden Random Walks danach unterscheiden, ob sie in ihrem zeitlichen Verlauf Werte in ganz $\mathbb{R}$ oder nur auf einem Gitter $d\mathbb{Z}$ annehmen können und herausstellen, dass Rekurrenz eine Solidaritätseigenschaft ist, also eine Eigenschaft, die entweder alle erreichbaren Punkte besitzen oder keiner. Im zweiten Abschnitt führen wir das Erneuerungsmaß ein, das der Charakterisierung rekurrenter RWs dienlich ist und zugleich die Brücke zum Rekurrenzsatz bilden wird.

Stellen wir uns ein Zufallsexperiment vor, dessen Ausgang durch eine Zufallsgröße X_1 beschrieben wird, die die Verteilung $\mathbb{P}^{X_1} = Q$ besitze. Das Zufallsexperiment werde nun zu durchnummerierten Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}$ wiederholt und die Ausgänge durch unabhängig identisch verteilte Zufallsgrößen $X_1, X_2, ...$ wiedergegeben. Die Partialsummenfolge $(S_n)_{n\geq 0}$ mit $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n X_k$ und einem von den Zuwächsen $X_1, X_2, ...$ unabhängigen Startpunkt S_0 wird *Random Walk* (RW) genannt.

1.0.1 Definition (Random Walk)
Ein Random Walk ist eine Folge von Zufallsgrößen $(S_n)_{n\geq 0}$, dessen Folgeglieder S_n Werte in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ annehmen, wobei $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n X_k$ mit unabhängig identisch Q-verteilten Zuwächsen $X_1, X_2, ...$ und einem von den Zuwächsen unabhängigen Anfangspunkt S_0. Im Falle von $Q_0 := \mathbb{P}^{S_0} = \delta_0$ heißt $(S_n)_{n\geq 0}$ Standard Random Walk (SRW), anderenfalls verschobener Random Walk (VRW).

Random Walks interessieren uns in der Wahrscheinlichkeitstheorie häufig und sind Bestandteil einer Vielzahl von Untersuchungen, die meist das Langzeitverhalten betreffen. Diesbezüglich Auskunft geben etwa das starke Gesetz der großen Zahlen und der zentrale Grenzwertsatz. Ersteres besagt, dass S_n/n fast sicher (f.s.) gegen den Erwartungswert $\mathbb{E}X$ konvergiert. Der Erwartungswert lässt sich also, wie übrigens auch die Verteilung von X_1 selbst, empirisch ermitteln. Der zentrale Grenzwertsatz gibt präzisere Auskünfte und besagt, dass $n^{1/2}(S_n/n - \mu)$ in Verteilung gegen die Normalverteilung

$N(0, \sigma^2)$ konvergiert, wobei μ den Erwartungswert und σ^2 die Varianz der beobachteten Zufallsgröße bezeichne. Aus $VarX/n^{1/2} = \sigma^2/n$, erhält man im Hinblick auf das starke Gesetz der großen Zahlen, dass $S_n/n - \mu$ für große n annähernd $N(0, \sigma^2/n)$-verteilt ist und damit eine Auskunft über die Konvergenzrate. In dieser Arbeit beschäftigt uns aber ein anderes Langzeitverhalten eines Random Walks, und zwar die Rekurrenz. Rekurrenz charakterisiert einen Random Walk dahingehend, ob er jeden Punkt, der mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann, auch unendlich oft besucht, wenn man nur lange genug wartet, wobei diese Sprechweise - wie wir in Kürze sehen werden - etwas unscharf ist und stillschweigend voraussetzt, dass der Random Walk nur Punkte auf einem Gitter erreichen kann.

Ein RW ist nicht nur Bestandteil vieler Anwendungen, sondern zugleich ein gut zu behandelnder stochastischer Prozess mit günstigen Eigenschaften. Aufgrund der Unabhängigkeit der $(X_k)_{k \geq 1}$ besitzt ein SRW zum Zeitpunkt n z.B. per Definition die Verteilung $\mathbb{P}^{S_n} = Q^{*(n)}$. Nach dem Multiplikationssatz A.1.4 besitzt S_n also die Fouriertransformierte φ^n, was nicht zuletzt bei den fourieranalytischen Ansätzen zur Charakterisierung von Rekurrenz, die in dieser Arbeit untersucht werden, grundlegend ist.

1.1. Random Walks, Gittertyp und Rekurrenz

Im Folgenden Verlauf gehen wir stets von eindimensionalen RWs auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ aus. Die Folgeglieder $S_n = X_1 + ... + X_n$ $(n \geq 1)$ eines SRWs besitzen, da die X_k $(k \geq 1)$ unabhängig identisch verteilt sind, die Verteilung $Q^{*(n)}$. Gehen wir nun auf einige grundlegende Eigenschaften eines RW ein und beginnen mit der Feststellung, dass ein RW eine *Markovkette* ist. Dies bedeutet, dass die Verteilung von S_{n+1}, bedingt unter der Vergangenheit des Prozesses bis zum Zeitpunkt n, nur vom letzten Zustand S_n abhängt, also dass $\mathbb{P}^{S_{n+1}|S_0,\ldots,S_n} = \mathbb{P}^{S_{n+1}|S_n}$ gilt. Genauer sind die Übergangswahrscheinlichkeiten in den jeweiligen Folgezustand durch den Übergangskern $\mathbb{P}\left(S_{n+1} \in B \mid S_n = x\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \in B - x\right)$ gegeben. Aufgrund der Unabhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitparameter n handelt es sich bei einem RW um eine *zeitlich homogene Markovkette*.

Wir definieren $\mathbb{P}_x^{S_0} = \delta_x$ woraus $\mathbb{P}_x^{S_n} := \delta_x * Q^{*(n)}$, bzw.

$$\mathbb{P}_x^{S_n}(B) = \mathbb{P}_0\left(S_n \in B - x\right).$$

für alle $B \in \mathcal{B}$ folgt. $\mathbb{P}_x^{S_n}$ ist also die Verteilung eines im Punkt x gestarteten RWs zum Zeitpunkt n. Schreibe $\mathbb{P}_\lambda^{S_n}$ für die Verteilung von S_n, wenn ein Random Walk mit Anfangsverteilung $\lambda = \mathbb{P}^{S_0} \neq \delta_0$ gegeben ist. Es gelte also

$$\mathbb{P}_\lambda^{S_n}(B) = \int \mathbb{P}_x^{S_n}(B)\,\lambda(dx).$$

Weiterhin bezeichne in diesem Sinne $\mathbb{E}_x f(S_n)$ den Erwartungswert von $f(S_n)$ bei gegebenem Startpunkt $S_0 = x$, wobei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion sei.

Zunächst erfolgt nun eine grundsätzliche Klassifikation von Random Walks anhand des "Gittertyps" der Zuwachsverteilung (vgl. [4], S. 243 ff.). Die Unterscheidung erfolgt dabei anhand der kleinsten abgeschlossenen Untergruppe $\mathbb{G}$ von $\mathbb{R}$, auf die der RW, bzw. seine Zuwachsverteilung Q konzentriert ist. Definiere dazu $\mathbb{G}_0 := \mathbb{R}$ mit den abgeschlossenen Untergruppen $\mathbb{G}_d := d\mathbb{Z}$ $(d \in \mathbb{R}^+)$ und $\mathbb{G}_\infty := \{0\}$.

1.1.1 Definition (d-arithmetisch, s. [4], 26.2, bzw. [5], 41.14)
Die Spanne eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, bzw. einer Zufallsgröße $X \sim Q$, sei definiert durch

$$d(Q) := sup\{c \in [0, \infty] : Q\left(\mathbb{G}_c\right) = 1\}$$

Ferner bezeichne $Q_z = Q(z + \cdot)$ das um z verschobene W'Maß. Dann heißt Q

- *nichtarithmetisch, falls $d(Q) = 0$*
- *vollständig nichtarithmetisch, falls $d(Q_z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$*
- *d-arithmetisch, falls $d(Q) > 0$*
- *vollständig d-arithmetisch, falls $d(Q_z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{G}_d$*

Die anschauliche Bedeutung des Zusatzes "Vollständigkeit" liegt darin, dass man ausschließt, dass die Gitterfeinheit variiert, wenn der Koordinatenursprung verschoben wird (der Koordinatenursprung ist stets ein Gitterpunkt). Ein Beispiel hierfür lässt sich konstruieren, indem man eine diskrete Zufallsgröße X auf $\mathbb{N}$ wählt und um eine irrationale Zahl a dezentriert, indem man zur Zufallsgröße $Y = X + a$ übergeht (vgl. [4], S. 243). Da in diesem Falle jedes Gitter, auf dem a liegt, keinen weiteren der Punkte $a + \mathbb{Z}$ enthält, ist Y nichtarithmetisch. Geht man durch Translation wieder zu X über, erhält man aber wieder eine Spanne von mindestens 1.

Da bei gegebenem SRW mit $X_1 \in \mathbb{G}_d$ f.s. auch $S_n \in \mathbb{G}_d$ f.s. für alle $n \geq 0$ gilt, ist der Gittertyp eines SRWs sinnvoll über seine Zuwachsverteilung definiert und wir sprechen von einem *d-arithmetischen SRW* $(d \in (0,\infty))$, bzw. von einem *nichtarithmetischen SRW*, wenn seine Zuwachsverteilung Q d-arithmetisch, bzw. nichtarithmetisch ist. Auch VRWs lassen sich nach dem Gittertyp ihrer Zuwachsverteilung charakterisieren, wenn man voraussetzt, dass die Startverteilung $\mathbb{P}^{S_0}$ aus $\mathfrak{W}_d := \mathfrak{W}(\mathbb{G}_d)$ stammt, also $\mathbb{P}\left(S_0 \in \mathbb{G}_d^c\right) = 0$ gilt:

Bemerkung. Gehen wir mittels einer Verteilung $\lambda \in \mathfrak{W}_d$ von einem d-arithmetischen SRW $(d \in [0,\infty])$ zu einem VRW über, so ist auch dieser wieder d-arithmethisch. Um dies zu einzusehen schreiben wir $\mathbb{P}_\lambda^{S_n}(B)$ als Faltung:

$$\mathbb{P}_\lambda\left(S_n \in \mathbb{G}_d\right) = \int \mathbb{P}_x\left(S_n \in \mathbb{G}_d\right)\lambda(dx) = \int \mathbb{P}_0\left(S_n \in \mathbb{G}_d - x\right)\lambda(dx) = 1.$$

Nun soll der Begriff der Rekurrenz eingeführt werden, woraufhin wir grundlegende Eigenschaften rekurrenter Random Walks besprechen werden. Im Falle arithmetischer RWs heißt ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ rekurrent, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 0}$ ihn $\mathbb{P}$-*f.s.* unendlich oft annimmt, also

$$\mathbb{P}\left(S_n = x \text{ unendlich oft}\right) = 1$$

gilt. Im nichtarithmetischen Fall müssen wir zu einer topologischen Definition übergehen, was man man im Falle eines Random Walks mit stetig verteilten Zuwächsen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sofort einsieht, da dann $\mathbb{P}\left(S_n = x\right) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

1.1.2 Definition (topologische Rekurrenz eines Punktes, s. [4], 28.1)
Für eine Folge $(S_n)_{n\geq 0}$ reellwertiger Zufallsgrößen heißt $x \in \mathbb{R}$ rekurrent falls

$$\mathbb{P}\left(|S_n - x| < \varepsilon \ u.o.\right) = 1 \tag{1.1.1}$$

für alle $\varepsilon > 0$, und sonst transient.

Im Folgenden wollen wir ergründen, inwiefern es Sinn ergibt, von einem rekurrenten Random Walk zu sprechen. Mit anderen Worten geht es uns um die Frage, ob Rekurrenz eine Eigenschaft ist, die sich alle Punkte, die der Prozess in seinem zeitlichen Verlauf annehmen kann, teilen.

Dazu bedarf es der Untersuchung der *Menge*

$$\mathfrak{R} := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist rekurrent für } (S_n)_{n\geq 0}\} \tag{1.1.2}$$

der Rekurrenzpunkte, wobei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein SRW sei. Definieren wir weiter

$$\mathfrak{E} := \{x \in \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(|S_n - x| < \varepsilon\right) > 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0\} \tag{1.1.3}$$

als die *Menge der erreichbaren Punkte*. Wir beantworten die soeben formulierte Frage vorab und werden nun zeigen, dass Rekurrenz eine *Solidaritätseigenschaft* ist, womit gemeint ist, dass entweder alle erreichbaren Punkte rekurrent sind, oder keiner. Insbesondere sind im Falle dessen, dass 0 oder irgendein anderer Punkt rekurrent ist, alle Punkte aus $\mathfrak{E}$ miteinander *verbunden*, d.h. für alle $x, y \in \mathfrak{E}$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt sowohl $\mathbb{P}_x\left(|S_k - y| < \varepsilon\right) > 0$, als auch $\mathbb{P}_y\left(|S_l - x| < \varepsilon\right) > 0$ für geeignete $k, l \in \mathbb{N}$.

1.1.3 Satz (Gruppe der rekurrenten Zustände, s. [4], 28.2)
Die Menge $\mathfrak{R}$ ist entweder leer oder es gilt $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{R}$ bildet eine additive Untergruppe von $\mathbb{R}$.

Beweis. Nehmen wir also o.B.d.A. $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ an. Seien $x \in \mathfrak{R}$ und $y \in \mathfrak{E} \supset \mathfrak{R}$. Wir zeigen $x - y \in \mathfrak{R}$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ können wir ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathbb{P}\left(|S_k - y| < \varepsilon\right) > 0$ wählen. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{P}\left(|S_n - x| < \varepsilon \text{ (nur) endlich oft}\right) \\
&\geq \mathbb{P}\left(|S_n - x| < \varepsilon \text{ endlich oft}, |S_k - y| < \varepsilon\right) \\
&= \int_{\{|S_k - y| < \varepsilon\}} \mathbb{P}\left(|S_n - x| < \varepsilon \text{ endlich oft} \mid S_k = z\right) \mathbb{P}^{S_k}(dz) \\
&\geq \int_{\{|S_k - y| < \varepsilon\}} \mathbb{P}\left(|S_n - S_k - (x - y)| < 2\varepsilon \text{ endlich oft} \mid S_k = z\right) \mathbb{P}^{S_k}(dz) \\
&= \int_{\{|S_k - y| < \varepsilon\}} \mathbb{P}\left(|S_{k+n} - S_k - (x - y)| < 2\varepsilon \text{ endlich oft} \mid S_k = z\right) \mathbb{P}^{S_k}(dz) \\
&= \mathbb{P}\left(|S_n - (x - y)| < 2\varepsilon \text{ endlich oft}\right) \mathbb{P}\left(|S_k - y| < \varepsilon\right),
\end{aligned}$$

Zum Verständnis der vorletzten Zeile sei darauf hingewiesen, dass n im Unterschied zu k nicht fixiert ist und die Bedingung 'unendlich oft' ausführlicher formuliert 'für unendlich viele n' bedeutet. Mit $\mathbb{P}(|S_n - (x - y)| < 2\varepsilon \text{ endlich oft}) = 0$ folgt, dass $\mathfrak{R}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist.

Da wir sogar die Wahl von y aus der Obermenge $\mathfrak{E}$ zuließen folgt außerdem $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$, bzw. ausformuliert: Im arithmetischen Fall wird jeder erreichbare Punkt $\mathbb{P}$-f.s. unendlich oft erreicht und im nichtarithmetischen Fall gilt dasselbe für jede beliebige ε-Umgebung jedes erreichbaren Punktes. In jedem Falle ist nämlich $0 \in \mathfrak{R}$, also für jedes $y \in \mathfrak{E}$ auch $0 - y = -y \in \mathfrak{R}$. Wiederholt man dies und ersetzt dabei y durch $-y$, folgt $y \in \mathfrak{R}$. □

Nun zeigen wir noch die Abgeschlossenheit der Menge $\mathfrak{R}$, mit deren Hilfe wir in Satz 1.1.5 den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{R}$ und dem Gittertyp eines RW herstellen.

Bemerkung. $\mathfrak{R}$ ist topologisch abgeschlossen, denn es gilt, gegeben $\varepsilon > 0$ und eine gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $n(\varepsilon)$ derart, dass $\left|x_{n(\varepsilon)} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, dass

$$\mathbb{P}\left(|S_k - x| < \varepsilon \ u.o.\right) \geq \mathbb{P}\left(\left|S_k - x_{n(\varepsilon)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ u.o.\right) = 1.$$

Nun ist $\mathfrak{R}$ also entweder leer, oder entspricht als abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$ einer der folgenden Gruppen:

(1) $\mathfrak{R} = \{0\}$

(2) $\mathfrak{R} = d\mathbb{Z}$ für ein $d \in \mathbb{R}^+$

(3) $\mathfrak{R} = \mathbb{R}$

Damit ist eine sinnvolle Definition der Rekurrenz als Eigenschaft eines RWs möglich:

1.1.4 Definition (Rekurrenz, s. [4], 28.3)
Ein SRW $(S_n)_{n \geq 0}$ heißt rekurrent falls $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ und anderenfalls transient.

Aufgrund der Gleichheit der Menge der rekurrenten Punkte und der Menge der erreichbaren Punkte nehmen die $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ f.s. Werte aus der Rekurrenzmenge und damit aus einer der oben aufgeführten Untergruppen von $\mathbb{R}$ an. Es gilt:

1.1.5 Satz (Klassifikation eines rekurrenten SRWs, s. [4], 28.2)
Für einen rekurrenten SRW trifft eine der folgenden Bedingungen zu:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(S_1 = 0) = 1 & (\Leftrightarrow \mathfrak{R} = \{0\}) \\ (S_n)_{n \geq 0} \textit{ ist d-arithmetisch} & (\Leftrightarrow \mathfrak{R} = d\mathbb{Z}) \\ (S_n)_{n \geq 0} \textit{ ist nichtarithmetisch} & (\Leftrightarrow \mathfrak{R} = \mathbb{R}) \end{array}$$

Beweis. Wegen $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ und gemäß den obigen Ausführungen bleibt lediglich zu zeigen, dass im Falle eines d-arithmetischen Random Walks $(S_n)_{n\geq 0}$ auch $\mathfrak{R} = d\mathbb{Z}$ mit demselben $d > 0$ gilt. Zum einen gilt aber $X_1 \in d\mathbb{Z}$ fs. $\Rightarrow S_n \in d\mathbb{Z}$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mathfrak{R} = \mathfrak{E} \subset d\mathbb{Z}$. Für jedes $c > d$ wiederum gilt $\mathbb{P}\left(X_1 \in c\mathbb{Z}\right) < 1$, also $c\mathbb{Z} \subsetneq \mathfrak{E} = \mathfrak{R}$. □

Bemerkung. Dass die Rekurrenz eines d-arithmetischen VRWs ($d \in [0, \infty)$) nicht von der Startverteilung $\lambda \in \mathfrak{W}_d(\mathbb{R})$ abhängt und wir daher von einem rekurrenten VRW sprechen können, wenn der zugehörige SRW rekurrent ist, sieht man anhand von

$$\mathbb{P}_\lambda\left(S_n \in B \text{ u.o.}\right) = \int \mathbb{P}_0\left(S_n \in B - x \text{ u.o.}\right) \lambda(dx),$$

da die Rekurrenz des SRWs $(S_n)_{n\geq 0}$ äquivalent dazu ist, dass $\mathbb{P}_0\left(S_n \in B - x \text{ u.o.}\right) = 1$ λ-f.s. für jede Menge B mit $\mathring{B} \cap \mathbb{G}_d \neq \emptyset$ gilt.

1.2. Das Erneuerungsmaß und seine Bedeutung im Zusammenhang mit Rekurrenz

Nun wird das Erneuerungsmaß eingeführt, das bei der Charakterisierung der Rekurrenz eine wichtige Rolle spielt. Seine besondere Bedeutung in dieser Arbeit liegt darin, dass sich mit seiner Hilfe zunächst eine äquivalente Bedingung für Rekurrenz formulieren lässt, aus der sich unter Verwendung der Fouriertransformation der Rekurrenzsatz ableitet.

1.2.1 Definition (Erneuerungsmaß)
Für einen Random Walk $(S_n)_{n\geq 0}$ mit Startverteilung $\lambda = \mathbb{P}^{S_0}$ wird das Erneuerungsmaß durch

$$U_\lambda := \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_\lambda^{S_n} \tag{1.2.1}$$

definiert. Schreibe im Falle einer Startverteilung $\lambda = \delta_x$ auch U_x. Falls wir unter Verwendung des Erneuerungsmaßes eine Aussage formulieren, in der die Startverteilung keine Rolle spielt, schreiben wir das Erneuerungsmaß kurz als U.

Zunächst stellen wir fest, dass das Erneuerungsmaß ein unendliches Maß ist. An Anschaulichkeit gewinnt es, wenn man es als Erwartungswert des zufälligen Zählmaßes schreibt, dessen Definition hier nachgeholt sei:

1.2.2 Definition
Für $B \in \mathcal{B}$ ist das zufällige Zählmaß definiert durch

$$N(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_B(S_k).$$

Das zufällige Zählmaß misst zu einer gegebenen Realisierung des Prozesses, wie viele der S_n Werte aus der Menge B annehmen. Auf die für eine Präzisierung dieser Bemerkung notwendige Einführung eines Standardmodells wollen wir an dieser Stelle verzichten, weil seine explizite Definition im weiteren Verlauf dieser Arbeit keine allzu große Rolle spielen wird.

Das Erneuerungsmaß von B erhält man aus dem zufälligen Zählmaß durch Bildung des Erwartungswertes. Es gibt also die erwartete Anzahl von Treffern in der Menge B wieder. Als Beispiel stelle man sich einen *Erneuerungsprozess* $(S_n)_{n\geq 0}$ vor, dessen Zuwächse $X_1, X_2, ...$ für die Lebensdauer einer technischen Komponente stehen, die beim Ausfall unmittelbar ausgetauscht werde. Für $n \geq 0$ beschreibt dann S_n den Zeitpunkt der n-ten Erneuerung der technischen Komponente und $U([t_0, t_1])$ die erwartete Anzahl von Erneuerungen im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ (s. [2], S. 2). Hierbei wollen wir nicht verschweigen, was ein Erneuerungsprozess ist, nämlich ein RW mit f.s. nichtnegativen Zuwächsen, die einen positiven Erwartungswert besitzen.

Mit dem Erneuerungsmaß lassen sich die folgenden Bedingungen für die Transienz bzw. die Rekurrenz eines RWs formulieren:

1.2.3 Satz (s. [4], Satz 28.4)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein SRW. Existiert ein offenes Intervall mit

$$0 < U(I) < \infty, \tag{1.2.2}$$

so ist $(S_n)_{n\geq 0}$ transient. Gilt umgekehrt $U(I) = \infty$ für mindestens ein endliches Intervall I, so ist $(S_n)_{n\geq 0}$ rekurrent.

Beweis. ☞ [4], S. 255 f. □

Wie im letzten Abschnitt nachgewiesen ist Rekurrenz eine Solidaritätseigenschaft und im Falle von $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ enthält die Menge der rekurrenten Punkte den Punkt 0, weshalb wir aus Satz 1.2.3 den folgenden Spezialfall gewinnen:

1.2.4 Korollar
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein nichtarithmetischer RW. Dann folgt aus seiner Rekurrenz $U([-\varepsilon, \varepsilon]) = \infty$ für alle $\varepsilon > 0$. Umgekehrt ist $(S_n)_{n\geq 0}$ rekurrent, wenn $U([-\varepsilon, \varepsilon]) = \infty$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt. Kurz gesagt: Ein RW ist genau dann rekurrent, wenn $U([-\varepsilon, \varepsilon]) = \infty$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt.

Bemerkung. Die Entsprechung von Korollar 1.2.4 im arithmetischen Fall lautet:

"*Ein d-arithmetischer VRW ($d \in [0, \infty)$) mit beliebiger Startverteilung $\lambda \in \mathfrak{W}_d$ ist genau dann rekurrent, wenn $U_\lambda(\{0\}) = \infty$ gilt.*"

Für eine Begründung, warum aus $U_0(\{0\}) = \infty$ bereits die Rekurrenz eines zu U gehörigen SRWs $(S_n)_{n\geq 0}$ folgt, verweisen wir auf [4], 7.18. Die Rückrichtung folgt sofort aus Satz 1.2.3. Dass die Aussage darüber hinaus nicht von der Startverteilung λ abhängt, folgt daraus, dass die Rekurrenz unabhängig von der Startverteilung des RWs ist, wie wir zum Ende des vorangegangenen Abschnitts bemerkt hatten.

Bevor wir fortfahren, notieren wir noch das folgende Kriterium für Rekurrenz, dessen hinreichende Rekurrenzbedingung wir aus Satz 1.2.3 gewinnen.

1.2.5 Satz (s. [4], Satz 28.6)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein SRW. Konvergiert $n^{-1}S_n$ für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0, so ist $(S_n)_{n\geq 0}$ rekurrent. Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen ist $(S_n)_{n\geq 0}$ also insbesondere dann rekurrent, wenn $\mathbb{E}X_1 = 0$.
Umgekehrt folgt aus der Rekurrenz des RWs bei gleichzeitiger Existenz des ersten Moments von X_1, dass notwendigerweise $\mathbb{E}X_1 = 0$ gilt.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$U([-1, 1]) \geq U([x, x+1])$$

gilt. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n \in [x, x+1]\}$, so gilt

$$\begin{aligned} U([x, x+1]) &= \int\limits_{\{\tau<\infty\}} \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{S_{\tau+n} \in [x, x+1]\}} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \int\limits_{\{\tau<\infty\}} \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{S_{\tau+n} - S_\tau \in [-1,1]\}} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \mathbb{P}(\tau < \infty) \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n \in [-1,1]) \leq U([-1,1]), \end{aligned}$$

wobei für den Übergang zur dritten Zeile mittels $\mathbb{P}^{(S_{\tau+n} - S_\tau)_{n \geq 0} \mid S_\tau} = \mathbb{P}^{(S_n)_{n \geq 0}}$ auf [4], 27.1 verwiesen sei. Die zweite Zeile folgt mit $S_\tau \in [x, x+1]$ sofort aus der Dreiecksungleichung. Nun zeigen wir $U([-1,1]) = \infty$ mittels

$$U([-1,1]) \geq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{2n} U([-n, n]). \tag{1.2.3}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in N$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_k}{k}\right| \leq \varepsilon\right) \geq \frac{1}{2}$$

für alle $k \geq m$. Dann gilt für alle k mit $m \leq k \leq \frac{n}{\varepsilon}$

$$\mathbb{P}(|S_k| \leq n) \geq \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt

$$U([-n, n]) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(|S_k| \leq n) \geq \sum_{m \leq k \leq \frac{n}{\varepsilon}} \mathbb{P}(|S_k| \leq n) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\varepsilon} - m\right)$$

und mittels $\varepsilon \downarrow 0$ mit Blick auf (1.2.3) die Rekurrenz des RWs.

Umgekehrt folgt aus $\mathbb{E}X_1 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und dem starken Gesetz der großen Zahlen $\lim_{n \to \infty} |S_n| = \infty$ f.s. und damit die Transienz des RWs. □

Bemerkung. Falls das erste Moment eines RWs existiert und seine Zuwächse $X_1, X_2, \ldots$ also den Erwartungswert $\mathbb{E}X_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ besitzen, liefert Satz 1.2.5 ein einfaches Kriterium für die Rekurrenz des RWs. Im anderen Fall, also falls gleichzeitig $\mathbb{E}X_1^+ = \infty$ und $\mathbb{E}X_1^- = \infty$ gilt, bereitet eine Aussage über die Rekurrenz offensichtlich mehr Mühe. Dies ist somit der interessantere Anwendungsfall des in dieser Arbeit diskutierten Rekurrenzsatzes.

Im Folgenden bezeichne Q, wenn nicht näher erläutert, die Zuwachsverteilung eines gegebenen RWs und φ seine Fouriertransformierte (F.T.). Werfen wir nochmals einen Blick auf Satz 1.2.3 und stellen fest, dass das Erneuerungsmaß eines RWs genau dann lokal endlich ist, wenn der RW transient ist. Dennoch liegt natürlich in beiden Fällen ein unendliches Maß vor, was uns vor das Problem stellt, dass wir auf U keine Fouriertransformation anwenden können. Wir behelfen uns damit, das Erneuerungsmaß zu approximieren. Eine Möglichkeit dazu besteht darin, die unendliche Summe bei einem genügend großen Index $N \in \mathbb{N}$ abzubrechen und $U(B)$ für eine Menge $B \in \mathcal{B}$ durch den Grenzübergang $N \to \infty$ zu gewinnen. Der Weg der Wahl ist an dieser Stelle jedoch das sogenannte Diskontieren.

1.2.6 Definition (diskontiertes Erneuerungsmaß)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein VRW mit Startverteilung $\lambda \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$.Für $0 < s \leq 1$ definieren wir das diskontierte Erneuerungsmaß durch

$$U_\lambda^s = \sum_{n\geq 0} s^n \mathbb{P}_\lambda^{S_n}. \tag{1.2.4}$$

Das so gewonnene diskontierte Erneuerungsmaß ist ein endliches Maß, das für festes $s \in (0,1)$ durch eine geometrische Reihe majorisiert wird. Nach dem Multiplikationssatz für Fouriertransformierte A.1.4 besitzt das diskontierte Erneuerungsmaß U_0^s eines SRWs für ein solches s die F.T.

$$\psi_s = \sum_{n\geq 0} s^n \varphi^n(t) = \frac{1}{1-s\varphi},$$

wobei wir die geometrische Reihe mit Hinweis auf Satz A.1.2, Teil (b), bilden können. Für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $U_0^s(B) \uparrow U_0(B)$ $(s \uparrow 1)$, d.h. die Familie $(U_0^s)_{s\in(0,1)}$ konvergiert für $s \uparrow 1$ vag gegen das Erneuerungsmaß des SRWs. Zudem konvergieren die zugehörigen F.T. ψ_s punktweise:

$$\lim_{s\uparrow 1} \psi_s = \frac{1}{1-\varphi} =: \psi \tag{1.2.5}$$

Der Grenzwert ψ ist aber nicht als Fouriertransformierte von U_0 zu verstehen, da U_0 als unendliches Maß keine solche besitzt. An den Einsstellen von φ, also insbesondere im Ursprung, besitzt ψ isolierte Singularitäten (s. [2], S 263 f.). Genau diese Singularitäten interessieren uns bei der Untersuchung des Rekurrenzsatzes, wobei uns im nichtarithmetischen Fall, der in dieser Arbeit behandelt wird, speziell die Singularität im Punkte 0 interessiert.

Der erste Abschnitt des folgenden Kapitels, in dem wir den Satz von Chung und Fuchs zitieren werden, knüpft unmittelbar an diesen Abschnitt an. Im Beweis des Satzes werden wir nachweisen, dass er eine fourieranalytische Umformulierung von Korollar 1.2.4 bildet, die unter Zuhilfenahme des diskontierten Erneuerungsmaß gewonnen wird. Gleichzeitig gewinnen wir einen Eindruck über den Zusammenhang zwischen der Rekurrenz eines RWs und der Bedingung aus dem Rekurrenzsatz, die der Bedingung aus dem Satz von Chung und Fuchs sehr ähnelt. Die größte Bedeutung des Satzes für diese Arbeit besteht jedoch darin, dass wir hieraus ohne Mühe eine Beweisrichtung des Rekurrenzsatzes folgern können. Hiermit sei begründet, warum der Satz erst im folgenden Abschnitt erwähnt wird.

2. Reduktionen

2.1. Reduktion auf eine Beweisrichtung

Mit Hilfe des folgenden Satzes aus dem Jahre 1951 werden wir die Verbindung zwischen dem Rekurrenzsatz und der Charakterisierung der Rekurrenz mittels des Erneuerungsmaßes aufzeigen. Nach seinem Beweis begründen wir, warum wir aus ihm sogleich eine Beweisrichtung des Rekurrensatzes gewinnen.

Satz von Chung und Fuchs
Ein Random Walk $(S_n)_{n\geq 0}$ mit Zuwachsverteilung Q und zugehöriger F.T. φ ist genau dann transient, wenn

$$\lim_{s\uparrow 1}\int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right)dt<\infty \tag{2.1.1}$$

gilt, wobei $\delta>0$ beliebig, mindestens aber so klein sei, dass $|\varphi(t)|<1$ für alle $0<|t|\leq\delta$.

Man bemerkt sofort die große Ähnlichkeit zu (Gl. 1). Der einzige Unterschied besteht darin, dass der Integrand für $0<s<1$ nun stetig und somit integrierbar ist. Anstelle eines uneigentlichen Integrals wird hier der Grenzwert $s\uparrow 1$ gebildet.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis des arithmetischen Falles gemäß [12], denn im Gegensatz zum nichtarithmetischen Fall wird hier der Zusammenhang zwischen dem Satz von Chung und Fuchs und Korollar 1.2.4 ohne weiteres ersichtlich. In diesem Fall ist Rekurrenz gemäß Korollar 1.2.4 nämlich gleichbedeutend mit $U_0(\{0\})=\infty$. Schreiben wir $U_0(\{0\})$ als Grenzwert aus dem diskontierten Erneuerungsmaß.

$$U_0(\{0\})=\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}s^n\mathbb{P}_0^{S_n}\left(\{0\}\right),$$

wobei der Ausdruck im Falle eines rekurrenten RW uneigentlich gegen ∞ konvergiert. Für festes $s<1$, also vor Vollziehen des Grenzübergangs, liegt auf der rechten Seite eine absolut konvergente Reihe vor, deren Summanden wir umformulieren, indem wir $\mathbb{P}_0^{S_n}$

mit Hilfe der inversen F.T. $\mathbb{P}_0^{S_n}(\{x\}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^n(t)e^{ixt}dt$ auswerten, die wir aus dem Multiplikationssatz A.1.4 und der Umkehrformel (A.1.3) erhalten:

$$U_0(\{0\}) = \lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^n(t)dt.$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe gilt weiter

$$U_0(\{0\}) = \frac{1}{2\pi}\lim_{s\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-s\varphi(t)}$$

und wir können, wie man beim Betrachten der linken Seite sieht, zum Realteil übergehen:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-s\varphi(t)} &= Re\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right)\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also die Gültigkeit des Satzes von Chung und Fuchs mit

$$U_0(\{0\}) = \frac{1}{2\pi}\lim_{s\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right)$$

Weniger direkt wird der Zusammenhang zu Korollar 1.2.4 im nichtarithmetischen Fall ersichtlich, denn die mittels Umkehrformel von Lévy ausgedrückten Maße $\mathbb{P}^{S_n}[-\varepsilon, \varepsilon]$ besitzen eine kompliziertere Darstellung als noch im arithmetischen Fall, insbesondere weil wir uns dort für Maße im Punkte 0 interessiert hatten.

Hier wird uns die Parsevalsche Gleichung A.1.3 helfen, wobei die Beweisidee aus [10], 9.4, stammt. Zuerst suchen wir eine geeignete Funktion f, so dass sich die Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ von unten gegen f und von oben gegen die F.T. $\hat{f}$ abschätzen lassen. Wählen wir hierfür die symmetrische Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die durch $f(x) := (1-|x|)^+$ definiert ist. Diese besitzt, wie man unter Ausnutzung der Symmetrie mittels partieller Integration leicht nachrechnet, die nichtnegative F.T. $\hat{f}(t) = 2/t^2\,(1-\cos(t))$, die auf $[-1, 1]$ positiv ist und als F.T. einer Funktion, die als Dichtefunktion einer Verteilung aufgefasst werden kann, in 0 durch 1 stetig fortsetzbar ist. Sei $m := \min\{\hat{f}(t) : t \in [-1, 1]\} > 0$, so gilt also $\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x) \leq m^{-1}\hat{f}(\frac{x}{\varepsilon})$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus der Parsevalschen

Gleichung A.1.3, bzw. mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} Q^{*(n)}([-\varepsilon,\varepsilon]) &\leq m^{-1}\int \hat{f}(\frac{x}{\varepsilon})\sum_{n\geq 0} Q^{*(n)}(dx) \\
&\leq m^{-1}\liminf_{s\uparrow 1}\int \hat{f}(\frac{x}{\varepsilon})\sum_{n\geq 0} sQ^{*(n)}(dx) \qquad (2.1.2)\\
&= m^{-1}\liminf_{s\uparrow 1}\int\left(\int f(t)e^{i\frac{x}{\varepsilon}t}\,dt\right)\sum_{n\geq 0} sQ^{*(n)}(dx) \qquad (2.1.3)\\
&= m^{-1}\varepsilon\liminf_{s\uparrow 1}\int \frac{f(\varepsilon t)}{1-s\varphi(t)}dt \\
&\leq m^{-1}\varepsilon\liminf_{s\uparrow 1}\int\limits_{[-\delta,\delta]} \frac{1}{1-s\varphi(t)}dt
\end{aligned}
$$

(2.1.4)

mit $\delta := \varepsilon^{-1}$, wobei in der zweiten Zeile das Lemma von Fatou verwendet wurde und in der vierten Zeile die Substitution $t \to \varepsilon t$ vollzogen wurde. Aus dieser Ungleichung folgt gemäß Korollar 1.2.4 die Transienz des RW, wenn der Ausdruck auf der rechten Seite gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Umgekehrt gilt analog

$$
\begin{aligned}
\limsup_{s\uparrow 1}\int\limits_{[-\delta,\delta]} \frac{1}{1-s\varphi(t)}dt &\leq m^{-1}\limsup_{s\uparrow 1}\int \frac{\hat{f}(\frac{t}{\delta})}{1-s\varphi(t)}dt \\
&\leq m^{-1}\delta\int f(\delta x)\sum_{n\geq 0} Q^{*(n)}(dx) \qquad (2.1.5)\\
&\leq m^{-1}\delta\sum_{n\geq 0} Q^{*(n)}([-\varepsilon,\varepsilon]).
\end{aligned}
$$

□

Mit Hilfe des Lemmas von Fatou erhält man aus dem Satz von Chung und Fuchs leicht eine Beweisrichtung des Rekurrenzsatzes, nämlich die folgende:

2.1.1 Lemma

Für einen transienten Random Walk $(S_n)_{n\geq 0}$ mit Zuwachsverteilung Q und zugehöriger F.T. φ gilt

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)dt < \infty$$

für jedes genügend kleine $\delta > 0$ mit $|\varphi(t)| < 1$ für alle $0 < t < \delta$.

Beweis. Aus dem Lemma von Fatou folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \lim_{s\uparrow 1} Re\left(\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right) dt \\ &\leq \liminf_{s\uparrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right) dt.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt somit aus dem Satz von Chung und Fuchs. □

Im Gegensatz zum Satz von Chung und Fuchs findet man beim Rekurrenzsatz keinen Grenzübergang $s \to 1$ und damit keine Spur des diskontierten Erneuerungsmaßes vor, was allerdings nicht bedeutet, dass wir davon keinen Gebrauch machen werden. Der Grenzübergang wird hier lediglich an anderer Stelle vollzogen werden. Da wir uns nun für die Beweisrichtung interessieren, bei der wir die Rekurrenz von $(S_n)_{n\geq 0}$ voraussetzen, könnte es aber zum Problem werden, dass U nicht einmal mehr lokal endlich ist. Abhilfe schafft hier der Potentialkern, dessen Definition im nichtarithmetischen Fall einige weitere Definitionen nötig macht, die wir im nächsten Kapitel ab Abschnitt 3.1 nachholen werden.

2.2. Reduktion auf den streng nichtarithmetischen Fall

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass wir uns beim Beweis der beiden zentralen Sätze o.B.d.A. auf den Fall von Random Walks beschränken können, deren Zuwachsverteilung eine $\boldsymbol{\lambda}$-stetige Komponente besitzt. Eine solche *nichtsinguläre* Zuwachsverteilung Q genügt nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma A.2.3 der *Cramerschen Bedingung*

$$\limsup_{t\to\infty} |\varphi(t)| < 1.$$

Verteilungen, die diese Bedingung erfüllen, nennen wir *streng nichtarithmetisch*. Falls Q singulär ist, werden wir zu einem modifizierten rekurrenten RW übergehen, dessen Zuwachsverteilung $\tilde{Q}$ wir geeignet konstruieren, wobei darauf zu achten ist, dass die F.T. $\tilde{\varphi}$ der neuen Zuwachsverteilung die Bedingungen der Sätze genau dann erfüllt, wenn dies für die F.T. von Q gilt. Dazu notieren wir folgendes Lemma.

2.2.1 Lemma

Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein Random-Walk, mit Zuwachsverteilung $Q \neq \delta_0$. Sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere charakteristische Funktion, die

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)}{t^4} \right| dt < \infty \tag{2.2.1}$$

erfülle. Dann ist es hinreichend, die Bedingungen (Gl. 1), (Gl. 2) *und* (Gl. 3) *aus den beiden Hauptsätzen für $\tilde{\varphi}$ zu verifizieren, um gleichzeitig die Gültigkeit der Aussagen für die charakteristische Funktion φ von Q zu erhalten.*

Beweis. Gehen wir also davon aus, dass $\tilde{\varphi}$ die oben genannten Aussagen erfüllt und rechnen nach, dass sich an der Existenz und Endlichkeit der uneigentlichen Integrale aus den Kriterien nichts ändert, wenn wir $\tilde{\varphi}$ durch φ ersetzen. Betrachten wir zunächst die Konvergenzaussagen (Gl. 1) und (Gl. 2). Verwende die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) - \left| Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) - Re\left(\frac{1}{1-\tilde{\varphi}(t)}\right)\right| dt \\
&\leq \int\limits_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\tilde{\varphi}(t)}\right) dt \\
&\leq \int\limits_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) + \left| Re\left(\frac{1}{1-\tilde{\varphi}(t)}\right) - Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)\right| dt
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

und nachfolgend die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| Re\left(\frac{1}{1-\tilde{\varphi}(t)}\right) - Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)\right| dt &\leq \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)}{\big(1-\tilde{\varphi}(t)\big)\big(1-\varphi(t)\big)} \right| dt \\
&\leq C \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)}{t^4} \right| dt,
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

um zu sehen, dass Gleichung (Gl. 1) genau dann für φ gilt, wenn dies für $\tilde{\varphi}$ der Fall ist. Dabei ist $C > 0$ eine Konstante, die wir aus Anwendung von Satz A.2.1 erhalten. Ganz entsprechend verwenden wir die folgende Abschätzung, die wir aus der Anwendung von A.2.1 erhalten, um für (Gl. 2) nach einer Abschätzung wie in (2.2.2) dasselbe Resultat zu erzielen: Aus

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{it}{1-\tilde{\varphi}(t)} - \frac{it}{1-\varphi(t)} \right| dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{it\big(\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)\big)}{\big(1-\tilde{\varphi}(t)\big)\big(1-\varphi(t)\big)} \right| dt \\ &\le C \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)}{t^3} \right| dt \qquad (2.2.4)\end{aligned}$$

folgt mit (2.2.1) die Integrierbarkeit des Differenztermes. Es bleibt zu zeigen, dass sich auch in (Gl. 3) der Grenzwert nicht verändert. Nach einer ähnlichen Abschätzung wie in (2.2.2) genügt es hierfür,

$$\lim_{y\to\pm\infty} \int_{-\delta}^{\delta} e^{iyt} \left| \frac{it}{1-\varphi(t)} - \frac{it}{1-\tilde{\varphi}(t)} \right| dt = 0$$

nachzuvollziehen, was aber direkt aus dem Riemann-Lebesgue-Lemma A.2.3 folgt, wenn man berücksichtigt, dass der Ausdruck

$$\left| \frac{it}{1-\varphi(t)} - \frac{it}{1-\tilde{\varphi}(t)} \right| \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}$$

gemäß (2.2.4) integrierbar ist. □

Das folgende Lemma erlaubt uns, im folgenden Text stets von Random Walks mit nichtsingulärer und insbesondere streng nichtarithmetischer Zuwachsverteilung auszugehen:

2.2.2 Lemma
Für jeden rekurrenten Random Walk auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *existiert ein nichtsinguläres und somit insbesondere streng nichtarithmetisches Wahrscheinlichkeitsmaß* $\tilde{Q}$ *auf* $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$*, das ebenfalls einen rekurrenten Random Walk definiert und dessen charakteristische Funktion* $\tilde{\varphi}$ *die Bedingung* (2.2.1) *erfüllt.*

Bemerkung. Neben dem Nachweis, dass die F.T. φ bzw. $\tilde{\varphi}$ der Zuwachsverteilungen zweier RWs simultan die Bedingungen aus dem Rekurrenz- bzw. dem zweiten Hauptsatz erfüllen, müssen wir zeigen, dass die Bedingung (2.2.1) gleichzeitig impliziert, dass entweder beide RWs rekurrent sind oder keiner der beiden. Dies trifft zu, und zwar folgt aus (2.2.1), dass $\tilde{\varphi}$ genau dann das Kriterium des Satzes von Chung und Fuchs erfüllt, wenn φ dies auch tut, was man genau wie in (2.2.3) vermöge

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| Re\left(\frac{1}{1-s\tilde{\varphi}(t)}\right) - Re\left(\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right)\right| dt$$
$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{s\left(\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)\right)}{\left(1-s\tilde{\varphi}(t)\right)\left(1-s\varphi(t)\right)} \right| dt \leq C\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)}{t^4} \right| dt$$

für alle $0 < s < 1$ mit einer Abschätzung wie in (2.2.2) feststellt. Alle Verteilungen $\tilde{Q}$, die diese Bedingung an die Momente erfüllen, sind also einerseits genau dann rekurrent und erfüllen andererseits genau dann die Kriterien aus den Rekurrenzsätzen, wenn dies für Q gilt. Demzufolge genügt es, eine Verteilung $\tilde{Q}$ zu konstruieren, deren F.T. erwähnten Bedingung genügt.

Im folgenden Beweis konstruieren wir nun - davon ausgehend, dass Q endliche Momente besitze - ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{Q}$ mit endlichen Momenten derart, dass es einen $\lambda\!\!\lambda$-stetigen Anteil besitzt und seine ersten drei Momente mit denen von Q übereinstimmen. Gemäß Satz A.1.5 ist nämlich die Übereinstimmung der ersten drei Momente der Verteilung $\tilde{Q}$ mit denen von Q bei gleichzeitiger Endlichkeit des vierten Momentes von $\tilde{Q}$ hinreichend dafür, dass die Bedingung (2.2.1) erfüllt ist. Bei der Konstruktion von $\tilde{Q}$ folgen wir [11] (S. 34 f.).
Warum können wir bei der Konstruktion davon ausgehen, dass Q endliche Momente besitzt? Anderenfalls wählen wir ein hinreichend großes $M \in \mathbb{N}$ und modifizieren nur den auf $[-M, M]$ eingeschränkten Teil $Q_M = Q(\cdot \cap [-M, M])$ des Maßes Q zu einem Maß ν mit stetigem Anteil, dessen Momente mit denen von Q_M übereinstimmen. Bezeichnen wir mit φ_M die F.T. von Q_M und mit φ_{M^c} die von $Q(\cdot \cap [-M, M]^c)$, so folgt mit $\tilde{Q} := \nu + Q(\cdot \cap [-M, M]^c)$ für die Differenz der Fouriertransformierten

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) &= (\varphi_M + \varphi_{M^c})(t) - (\nu + \varphi_{M^c})(t) \\ &= \int_{-M}^{M} e^{itx} Q(dx) - \int e^{itx} \nu(dx) \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

und es genügt nunmehr zu zeigen, dass die ersten drei Momente von Q_M und ν übereinstimmen und dass das vierte Moment von ν endlich ist. Zusätzlich müssen wir darauf achten $M \in \mathbb{N}$ genügend groß zu wählen, so dass das Intervall $(-M, M)$ mindestens zwei Punkte enthält, die unter Q positive Masse besitzen. Dies stellt uns aber vor keine

Probleme, da Q nach Voraussetzung $Q(\{0\}) < 1$ erfüllt.

Beweis von Lemma 2.2.2. Sei Q ein singuläres Wahrscheinlichkeitsmaß, dass einen rekurrenten RW definiert. Nach obigen Beobachtungen gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass Q endliche Momente hat und zwei Punkte y_1, y_2 mit $Q(y_i) > 0$ $(i = 1, 2)$ existieren.

Wir werden nun $\tilde{Q}$ in zwei Schritten konstruieren: Im ersten Schritt definieren wir eine Familie $(\mu_{y,\alpha,t})_{0 \leq t \leq 1}$ nichtsingulärer Maße. Der Parameter t wird uns ermöglichen, das dritte Moment zu variieren, α wird zur Skalierung der Masse dienen und y die Streuung des Maßes festlegen. Die niedrigeren Momente werden durch geeignete Parameterwahl beliebig klein und werden im zweiten Schritt durch Interpolation mit einer diskreten Verteilung angepasst.

(a) Sei μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß mit absolut stetiger Komponente und endlichen Momenten. Mit Hilfe der Translation $T_y := [x \longrightarrow x + y]$ definieren wir die angesprochene Maßfamilie als die Konvexkombination

$$\mu_{y,\alpha,t} := \alpha \left(t\mu^{T_y} + (1-t)\mu^{T_{-y}} \right)$$

mit $t \in [0, 1]$. Wie man unter Anwendung des Transformationssatzes leicht nachrechnet gilt für die n-ten Momente von μ^{T_y}

$$\begin{aligned} \int x^n \mu^{T_y}(dx) &= y^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y^k \int x^{n-k} \mu(dx) \\ &= y^n + O(y^{n-1}) \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

und folglich

$$\int x^n \mu_{y,\alpha,t}(dx) = \alpha \left((2t-1)y^n + O(y^{n-1}) \right) \tag{2.2.7}$$

für ungerade n, bzw.

$$\int x^n \mu_{y,\alpha,t}(dx) = \alpha \left(y^n + O(y^{n-1}) \right) \tag{2.2.8}$$

für gerade n Für das erste Moment m von $\mu_{y,\alpha,t}$ gilt beispielsweise

$$\int x \, \mu_{y,\alpha,t}(dx) = \alpha \left((2t-1)y + \int x \, \mu(dx) \right)$$

und bei festem y bewirkt der Parameter $t \in [0, 1]$ eine Verschiebung des Erwartungswertes innerhalb des Intervalls $[\alpha(m - y), \alpha(m + y)]$.

Sei $\varepsilon \in (0, 1/2)$ beliebig klein. Zu einem beliebig großen, noch nicht spezifizierten $N \in \mathbb{N}$ lässt sich y so groß wählen, dass der Abstand zwischen y^3 und den Termen der Ordnung y^2 groß genug ist, damit gemäß (2.2.6) bei gleichzeitiger Wahl eines genügend kleinen α, das gemäß der letzten der in (2.2.9) folgenden Bedingungen kleiner als ε ($< 1/2$) sei,

$$\int x^3 d\mu_{y,\alpha,1} = \int x^3 d\mu^{T_y} > N,$$

sowie

$$\int x^3 d\mu_{y,\alpha,0} = \int x^3 d\mu^{T_{-y}} < -N$$

und zum anderen

$$\left| \int x \, d\mu_{y,\alpha,t} \right| < \varepsilon, \int x^2 d\mu_{y,\alpha,t} < \varepsilon, \text{ sowie } \int d\mu_{y,\alpha,t} < \varepsilon \tag{2.2.9}$$

für alle $0 \le t \le 1$ gilt. Somit erhalten wir ein nach t parametrisiertes $\lambda\!\!\lambda$-stetiges Maß mit Gesamtmasse α, dessen drittes Moment wir stetig in t in beliebig großen Grenzen verschieben können, während die niedrigeren Momente in einem beliebig kleinen Intervall liegen. Das erste Moment schwankt innerhalb dieses Intervalls stetig in Abhängigkeit von t. Das Maß $\mu_{y,\alpha,t}$ wollen wir nun so mit einem weiteren Maß zur Korrektur der ersten beiden Momente ergänzen, dass wir - bei Wahl eines geeigneten Parameters - die den Vorgaben an $\tilde{Q}$ entsprechende Verteilung mit $\lambda\!\!\lambda$-stetigem Anteil gewinnen.

(b) Definiere nun wie folgt ein singuläres Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_{a,b}$ mit Erwartungswert a und zweitem Moment b: Wähle $Q_{a,b}$ derart, dass es zwei Punkten x_1 und x_2 mit identischem Abstand d von a die Masse $1/2$ zuweist, wobei der Abstand eindeutig durch die Bedingung

$$\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = \frac{1}{2}\left((a-d)^2 + (a+d)^2\right) = a^2 + d^2 = b \tag{2.2.10}$$

festgelegt ist. Nun wollen wir mit Hilfe $Q_{a,b}$ die Gesamtmasse, sowie die ersten beiden Momente von $\mu_{y,\alpha,t}$ korrigieren. Definiere

$$\nu_{y,\alpha,t} := \mu_{y,\alpha,t} + (1-\alpha)Q_{a,b}.$$

Unsere Vorgaben an a und b für vorgegebene y, α lauten also

$$\int x \, d\nu_{y,\alpha,t} = \int x \, dQ \text{ und } \int x^2 d\nu_{y,\alpha,t} = \int x^2 dQ.$$

Der Parameter $a = a(t)$ ist also abhängig von t zu wählen, ist aber stetig in t, weil das erste Moment von $\mu_{y,\alpha,t}$ für jede feste Wahl von y und α stetig von t abhängt. Benennen wir das erste Moment von Q mit m_1 und das zweite mit m_2, schwanken zudem $a(t)$ und b innerhalb der Intervalle $[(1-\alpha)^{-1}(m_1-\varepsilon),(1-\alpha)^{-1}(m_1+\varepsilon)]$, bzw. $[(1-\alpha)^{-1}(m_2-\varepsilon),(1-\alpha)^{-1}(m_2+\varepsilon)]$ und damit jeweils innerhalb eines Intervalls, dessen Breite unabhängig von α und y durch $2\varepsilon/(1-\alpha) < 4\varepsilon$ beschränkt ist, denn das erste und das zweite Moment des Maßes $\mu_{y,\alpha,t}$ sind nach unseren Vorgaben an die Parameterwahl aus Schritt 1 gleichmäßig durch ε beschränkt. Aus diesem Grunde wird bei der Ergänzung um $Q_{a,b}$ das dritte Moment nur innerhalb fester Grenzen verändert: Berücksichtigt man die Variationsgrenzen von a und b, so gilt für das dritte Moment von $Q_{a,b}$

$$\begin{aligned}\left|\int x^3(1-\alpha)dQ_{a,b}\right| &= (1-\alpha)\left[(a+d)^3+(a-d)^3\right] \\ &= (1-\alpha)\left[\left(a+\left|b-a^2\right|^{1/2}\right)^3+\left(a-\left|b-a^2\right|^{1/2}\right)^3\right] < C\end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante C, die neben $\varepsilon > 0$ nur vom Erwartungswert und der Varianz von Q abhängt. Daher können wir im ersten Schritt unter den dortigen Vorgaben speziell ein genügend großes N und ein genügend kleines α derart wählen, dass

$$\int x^3\nu_{y,\alpha,1}(dx) > \left|\int x^3 dQ\right|$$

$$\text{und} \quad \int x^3\nu_{y,\alpha,0}(dx) < -\left|\int x^3 dQ\right|,$$

gilt, und der Ausdruck stetig in t ist.

Fassen wir also zusammen:

- $\varepsilon > 0$ ist vorgegeben
- abhängig von ε und den ersten beiden Momenten von Q ergeben sich Schranken für die Korrekturparameter a und b
- abhängig von ε, dem möglichen Wertebereich von a und b und den ersten drei Momenten von Q wählen wir im ersten Schritt y, N und $\alpha < \varepsilon < 1/2$, so dass das dritte Moment von $\nu_{y,\alpha,t}$ stetig in t in einem genügend großen Bereich variiert.
- abhängig von y und α wählen wir b, um das zweite Moment von ν anzupassen

- abhängig von y, α und t wählen wir den Korrekturparameter $a = a(t)$, der ebenfalls stetig in t ist, um das erste Moment von ν anzupassen

Um diesen Algorithmus abzuschließen, wählen wir abschließend $t \in [0, 1]$ mit

$$\int x^3 \nu_{y,\alpha,t}(dx) = \int x^3 dQ.$$

$\square$

3. Umformulierungen und Vorbereitungen

3.1. Der Potentialkern und die Umformulierung des Rekurrenzsatzes

In diesem Abschnitt werden wir in Definition 3.1.1 den diskontierten Potentialkern A^s $(0 < s < 1)$ einführen, den wir mit Hilfe des diskontierten Erneuerungsmaßes definieren werden. Wie wir im folgenden Kapitel nachweisen werden, ist der Potentialkern A, den wir durch Bildung des Limes $s \uparrow 1$ aus A^s erhalten, im Unterschied zum diskontierten Erneuerungsmaß, auch im Falle eines rekurrenten RWs in dem Sinne *lokal endlich*[1], dass $Af(x)$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ und $x \in \mathbb{R}$ endlich ist, wobei sowohl der Ausdruck $Af(x)$ als auch die Funktionenmenge $\mathfrak{F}$ in Kürze definiert wird. Unter Verwendung des Potentialkerns werden wir Satz 3.1.3 als eine stärkere Variante des Rekurrenzsatzes und den zum zweiten Hauptsatz äquivalenten Satz 3.1.4 formulieren. Zusammen mit Lemma 3.1.2, in dem eine notwendige Voraussetzung für Satz 3.1.3 bewiesen wird, bilden diese beiden Sätze den Schwerpunkt dieses Abschnitts. Dass die Umformulierungen zulässig sind wird erst im folgenden Abschnitt bewiesen. Zuvor müssen wir noch einige der nun folgenden Ausdrücke in eine fourieranalytische Schreibweise übersetzen.

Im Unterschied zu unserer Definition des Erneuerungsmaßes in 1.2.1 und seines diskontierten Pendants in 1.2.6 beginne die Summe in (1.2.1), bzw. in (1.2.4) von nun an bei 1, d.h. es gelte

$$U(B) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}^{S_n}(B), \text{ bzw. } U^s(B) = \sum_{n \geq 1} s^n \mathbb{P}^{S_n}(B)$$

für alle $B \in \mathcal{B}$ und $0 < s < 1$. Wie man sofort einsieht, behält Korollar 1.2.4 auch bei dieser modifizierten Definition seine Gültigkeit und die Rekurrenz eines RWs kann unver-

[1] Ein Maß Q heißt lokal endlich, wenn $Q(B) < \infty$ für jedes beschränkte $B \in \mathcal{B}$ gilt.

ändert wie in Abschnitt 1.2 besprochen mit Hilfe des Erneuerungsmaßes charakterisiert werden.

Im Folgenden fassen wir ein Maß Q stets als lineares Funktional auf, wenn es auf eine Funktion trifft, indem wir den Erwartungswert bilden. Sei etwa Q die Verteilung einer Zufallsgröße X, so definieren wir $Qf := \mathbb{E}f(X)$ Betrachten wir einen RW $(S_n)_{n\geq 0}$, so bezeichne ferner $\mathbb{P}^{S_n}f(x)$ den unter einem Startwert bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}_x f(S_n)$ und wir fassen dabei $\mathbb{P}^{S_n}f$ als Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf. Mit unserer modifizierten Definition von U^s gilt also

$$U^s f(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n\geq 1} s^n f(S_n) \right].$$

Bemerkung. Die Ergebnisse über die Charakterisierung der Rekurrenz mittels des Erneuerungsmaßes aus Abschnitt 1.2 lassen sich auch mit Hilfe der Operatorschreibweise formulieren. Wir notieren zunächst dass für Funktionen $f \in \mathfrak{C}_0$, die aufgrund ihrer Stetigkeit und der Tatsache, dass sie einen kompakten Träger besitzen, beschränkt sind, $-\infty < Uf(x) < \infty$ gilt. Andererseits gilt $Uf(x) = \infty$ für jede nichtnegative Funktion $0 \neq f \in \mathfrak{C}_0$ genau dann, wenn der RW rekurrent ist. Der Träger einer solchen Funktion enthält nämlich wegen der Stetigkeit insbesondere ein nichtleeres Inneres I. Nach Übergang zu einer geeigneten Teilmenge von I nehme f o.B.d.A. ein Minimum $m > 0$ an, so dass wir im Falle eines rekurrenten RWs $Uf(x) \geq mU_x(I) = \infty$ erhalten (s. Satz 1.2.3).

Im Folgenden beschränken wir uns meist auf eine bestimmte Klasse von Funktionen, nämlich auf die Menge

$$\mathfrak{F} := \{f \in \mathfrak{C}_0 : \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(t)\right| dt < \infty\} \tag{3.1.1}$$

der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, deren F.T. $\hat{f}$ absolut integrierbar ist ($\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$). Ab Abschnitt 3.2 werden wir die Bedingung an die absolute Integrierbarkeit häufiger für den Beweis der Existenz und Endlichkeit einiger Integrale benötigen.

Bemerkung. Die lokale Endlichkeit eines Maßes Q ist offensichtlich äquivalent dazu, dass Qf für alle $f \in \mathfrak{C}_0$ endlich ist, was wir bereits zu Beginn der vorhergegangenen Bemerkung verwendet haben. Ebenso gilt, dass Q genau dann lokal endlich ist, wenn $Qf < \infty$ für alle $f \in \mathfrak{F}$. Hierfür müssen wir wegen $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$ nur die Rückrichtung zeigen, für deren Beweis wir ein weiteres Mal die Funktion $f(x) := (1-|x|)^+$ verwenden (s. Satz 2.1). Diese besitzt die in 0 stetig fortsetzbare und absolut integrierbare F.T. $\hat{f}(t) = \frac{2}{t^2}(1 - \cos(t))$.

Nun existiert für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}$ ein Intervall I mit $\mathbb{1}_I \geq \mathbb{1}_B$. Da bei Wahl eines genügend großen $a > 0$ weiter $f_a(x) := 2f(\frac{x}{a}) \geq \mathbb{1}_I(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $Qf_a \geq Q(B)$ gilt, impliziert $Qf_a < \infty$ für alle $a > 0$ bereits $Q(B) < \infty$ für alle beschränkten $B \in \mathcal{B}$, also die lokale Endlichkeit von Q. Die F.T. $\hat{f}_a$ von f_a ist außerdem wegen $\hat{f}_a(t) = 2a\hat{f}(at)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wieder absolut integrierbar und da $f_a \in \mathfrak{F}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, folgt die Behauptung.

Schließlich definieren wir noch für stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, also insbesondere für alle $f \in \mathfrak{F}$

$$J(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \quad \text{sowie } K(f) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{3.1.2}$$

und bezeichnen mit $\mathfrak{F}^+$ die Menge der nichtnegativen $f \in \mathfrak{F}$. $J(f)$ kann man sich, wenn man f als die Dichtefunktion eines Maßes auffasst, als die Gesamtmasse des Maßes vorstellen, wohingegen $K(f)$ nach dieser Interpretation das erste Moment repräsentiert. Offensichtlich sind J und K lineare Funktionale auf $\mathfrak{F}$.

Nun definieren wir den diskontierten Potentialkern A^s, den wir später, nach Übersetzung in eine fourieranalytische Schreibweise, zur Umformulierung des Rekurrenzsatzes und des zweiten Hauptsatzes nutzen werden.

3.1.1 Definition

Für eine beliebige, fest gewählte Funktion $g \in \mathfrak{F}^+$ mit $J(g) = 1$ und $K(g) = 0$ setzen wir $c^s := U^s g(0)$ und definieren für Funktionen $f \in \mathfrak{F}$ und für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ den diskontierten Potentialkern A^s durch

$$A^s f(x) := c^s J(f) - U^s f(x). \tag{3.1.3}$$

Der Potentialkern A ist als dessen Grenzwert für $s \uparrow 1$, also durch

$$Af(x) := \lim_{s \uparrow 1} A^s f(x)$$

definiert, sofern dieser existiert und endlich ist.

Auffällig ist, dass g als Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen, zentrierten Verteilung aufgefasst werden kann. Der Ausdruck $U^s g(0)$ strebt im Falle eines rekurenten RW für $s \uparrow 1$ stets gegen ∞ und auch $U^s f(x)$ nimmt i.A. für $s \uparrow 1$ keinen endlichen Grenzwert an. In Kapitel 4 werden wir nachweisen, dass die Eichung mittels $J(f)U^s g(0)$ in der Definition von A^s dazu führt, dass der Grenzwert von $A^s f(x)$ $(s \uparrow 1)$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ und $x \in \mathbb{R}$ existiert und endlich ist.

Die Definition des Potentialkerns gewinnt an Anschaulichkeit, wenn wir in seiner Definition 3.1.1 $f = g$ wählen. Dann gilt $A^s f(x) = U^s f(0) - U^s f(x)$ und $Af(x)$ ist eine Differenz erwarteter Erneuerungen bei Variation des Startwertes, wobei mit "erwarteten Erneuerungen" die erwartete und mittels f gewichtete Anzahl von Eintritten des RWs in den Träger von f gemeint ist. Bei beliebiger Wahl von f unterscheiden sich i.A. Träger und Funktionsverlauf von f und g, was jedoch, wie wir nachweisen werden, keinen Einfluss auf die Endlichkeit von $\lim_{s\uparrow 1} A^s f(x)$ und das Verhalten von $Af(x)$ für $x \to \pm\infty$ hat.

Bemerkung. Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} A^s(f_1 + f_2)(x) &= J(f_1 + f_2)c^s - U^s(f_1 + f_2)(x) \\ &= J(f_1)c^s + J(f_2)c^s - U^s f_1(x) - U^s f_2(x) \\ &= A^s f_1(x) + A^s f_2(x) \end{aligned}$$

für alle $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$, sowie

$$\begin{aligned} A^s(af)(x) &= J(af)c^s - U^s(af)(x) \\ &= aJ(f)c^s - aU^s f(x) = aA^s f(x) \end{aligned}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathfrak{F}$. A^s ist also ein linearer Operator auf $\mathfrak{F}$.

Bevor wir die angekündigten Umformulierungen vornehmen, notieren wir das folgende Lemma, dessen Aussage die Grundlage für die Umformulierung des Rekurrenzsatzes in Satz 3.1.3 bildet:

3.1.2 Lemma

Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein streng nichtarithmetischer rekurrenter Random Walk. Für alle $f \in \mathfrak{F}^+$ mit $J(f) > 0$ und $K(f) = 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert

$$\lim_{s\uparrow 1}(A^s f(x) + A^s f(-x)) \tag{3.1.4}$$

und der Grenzwert ist endlich.

Nun formulieren wir die beiden zentralen Sätze um und beginnen mit dem folgenden Satz, aus dem der Rekurrenzsatz folgt:

3.1.3 Satz (Umformulierter Rekurrenzsatz)
Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein rekurrenter Random Walk, dessen Zuwachsverteilung Q eine $\lambda\!\!\lambda$-stetige Komponente besitzt. Für alle $f \in \mathfrak{F}^+$ mit $J(f) > 0$ und $K(f) = 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{s\uparrow 1} (A^s f(x) + A^s f(-x)) = \infty. \tag{3.1.5}$$

Eine Umformulierung des zweiten Hauptsatzes liegt dagegen im folgenden Satz vor, der eine Aussage über das asymptotische Verhalten von Differenzen der Form $Af(x+y) - Af(y)$ bei festem Abstand x des Funktionsarguments von Af trifft:

3.1.4 Satz (Umformulierter zweiter Hauptsatz)
Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein rekurrenter Random Walk, dessen Zuwachsverteilung Q eine $\lambda\!\!\lambda$-stetige Komponente besitzt. Für $f \in \mathfrak{F}$ und $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{s\uparrow 1} A^s f(x) = Af(x) \tag{3.1.6}$$

und ist endlich. Desweiteren gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} (Af(x+y) - Af(y)) = \pm x\sigma^{-2} J(f). \tag{3.1.7}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. In beiden Fällen ist die Konvergenz gleichmäßig auf Kompakta.

Satz 3.1.4 wird im Falle unendlicher Varianz nur für $f \in \mathfrak{F}^+$ bewiesen. Dies ist jedoch, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, hinreichend für die Implikation des zweiten Hauptsatzes.

Bevor wir nachweisen können, dass wir für unser Anliegen zum Beweis der obigen beiden Sätze übergehen dürfen, bedarf es noch der Übersetzung einiger der oben aufgeführten Ausdrücke in eine fourieranalytische Schreibweise. Auch in den Beweisen ab Kapitel 4 werden wir des öfteren auf die fourieranalytischen Formulierungen der Terme zurückgreifen. Wir beginnen mit der Übersetzung des diskontierten Erneuerungsmaßes, das wir für eine gegebene Funktion $f \in \mathfrak{F}$ zunächst explizit als Integral schreiben:

$$\begin{aligned} U^s f(x) &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{\infty} s^n f(S_n)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{E}_0\left[f(S_n + x)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int f(x+y)\, \mathbb{P}_0^{S_n}(dy). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck lässt sich weiter umformen, indem man f aus seiner Fouriertransformierten zurückgewinnt, wobei wir die Angabe des Startwertes 0 unterdrücken und anmerken, dass die Integration und die Grenzwertbildung, die in der unendlichen Summe steckt, nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz vertauscht werden darf:

$$\begin{aligned} U^s f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int f(x+y)\, \mathbb{P}^{S_n}(dy) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-i(x+y)t}\, dt \right\} \mathbb{P}^{S_n}(dy) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-ixt} e^{-iyt}\, dt\ \mathbb{P}^{S_n}(dy) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-ixt} \left\{ \int e^{-iyt}\ \mathbb{P}^{S_n}(dy) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-t) e^{ixt} \left\{ \int e^{iyt}\ \mathbb{P}^{S_n}(dy) \right\} dt \qquad (3.1.8) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-t) e^{ixt} \varphi^n(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-t) e^{ixt} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \varphi^n(t)\, dt \\ &= \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(-t) e^{ixt} \varphi(t)}{1 - s\varphi(t)}\, dt \end{aligned}$$

Hierbei wurde in Zeile 4 der Satz von Fubini verwendet, in Zeile 5 wurde die Substitution

$t \to -t$ vollzogen und in der letzten Zeile die geometrische Reihe unter Berücksichtigung von $s\,|\varphi(t)| < 1$ für alle $0 < s < 1$ eingesetzt.

Mit Hilfe von (3.1.8) können wir nun den diskontierten Potentialkern umformulieren, und zwar gilt:

$$A^s f(x) = \frac{s}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \hat{f}(-t)e^{ixt}}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t)\, dt. \tag{3.1.9}$$

3.2. Zur Gültigkeit der Umformulierungen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst Lemma 3.1.2 beweisen. Anschließend wird bewiesen, dass wir für den Beweis des Rekurrenzsatzes und des 2. Hauptsatzes zum Beweis der Sätze 3.1.3 und 3.1.4 übergehen dürfen.

Notieren wir zunächst, dass die Taylorentwicklung 2. Ordnung der Fouriertransformierten $\hat{f}$ einer Funktion $f \in \mathfrak{F}$ im Punkte 0 gemäß Satz A.1.5 und mit Blick auf (3.1.2)

$$\hat{f}(t) = J(f) + itK(f) + O(t^2) \tag{3.2.1}$$

lautet. Dass Taylornäherungen beliebiger Ordnung von $\hat{f}$ existieren, folgt mit Satz A.1.5 daraus, dass f einen kompakten Träger besitzt und somit als Dichte eines endlichen Maßes aufgefasst werden kann, dessen Momente sämtlich endlich sind. Beweisen wir nun zunächst Lemma 3.1.2.

Beweis von Lemma 3.1.2. Aus (3.1.9) erhalten wir

$$A^s f(x) + A^s f(-x) = \frac{s}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t)\, dt. \tag{3.2.2}$$

Zu zeigen ist, dass der Ausdruck für alle $x \in \mathbb{R}$ für $s \uparrow 1$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Sei nun o.B.d.A. $J(f) = 1$. Ansonsten können wir im nichttrivialen Fall $J(f) \neq 0$ den Ausdruck mit $J(f)^{-1}$ multiplizieren. Zunächst schätzen wir den Integranden mit Hilfe von Satz A.2.1 für t aus einem genügend kleinen Intervall $[-\delta, \delta]$ mit $\varphi(t) \neq 1$ für $t \in [-\delta, \delta]$ ab: Es gilt

$$\left| \frac{\hat{g}(-t) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t) \right| \;\; \leq \;\; C\, \frac{\left| \hat{g}(-t) - \cos(xt)\hat{f}(-t) \right|}{t^2}\, |\varphi(t)|$$

für $t \in [-\delta, \delta] \backslash \{0\}$ mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$. Wegen $K(f) = 0$ erhalten wir in zweiter Näherung aus (3.2.1)

$$\hat{f}(t) = 1 + O(t^2), \text{ sowie } \hat{g}(t) = 1 + O(t^2)$$

und damit

$$C \, \frac{\left|\hat{g}(-t) - \cos(xt)\hat{f}(-t)\right|}{t^2} \, |\varphi(t)| \; = \; C \, \frac{\left|1 - \cos(xt) + O(t^2)\right|}{t^2} \, |\varphi(t)|$$

Da auch der Term $1 - \cos(xt)$ von der Ordnung $O(t^2)$ ist, ist der Ausdruck eine in 0 stetig ergänzbare Majorante des Integranden, so dass aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz unmittelbar die Existenz und Endlichkeit des uneigentlichen Integrals in (3.2.2) und

$$\lim_{s \uparrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t) \, dt = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - \varphi(t)} \varphi(t) \, dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt.

Weil wir nichtarithmetische Random Walks betrachten, folgt die Integrierbarkeit auf $[-\delta, \delta]^c$ und die in x gleichmäßige Beschränktheit des uneigentlichen Integrals nach einfacher Abschätzung vermöge $\limsup_{t \to \infty} \varphi(t) < 1$ und der Tatsache, dass $\hat{f}$ und $\hat{g}$ absolut integrierbar sind (☞ (A.2.9)). □

Der folgende Satz impliziert die Äquivalenz des zweiten Hauptsatzes und des Satzes 3.1.4 ohne den Zusatz der lokal gleichmäßigen Konvergenz. In Teil (a) des Satzes zeigen wir die Äquivalenz des jeweils ersten Teils der beiden Sätze. Dabei verwenden wir aber für den Ausdruck $A^s f(x)$ aus Gleichung (3.1.6) seine fourieranalytische Darstellung in (3.1.9). In Teil (b) wird die Äquivalenz von (Gl. 3) und (3.1.7) formuliert, wobei auch dort die fourieranalytische Übersetzung des Termes $Af(x+y) - Af(y)$ genutzt wird, und zwar erhält man aus (3.1.9) für alle $0 < s < 1$:

$$A^s f(x + y) - A^s f(y) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iyt}(1 - e^{ixt})\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t) dt. \tag{3.2.3}$$

3.2.1 Satz

Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein streng nichtarithmetischer rekurrenter Random Walk. Seien weiter $f \in \mathfrak{F}$ und $g \in \mathfrak{F}$ mit $J(g) = 1$ und $K(g) = 0$ gegeben.

a) *Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Der Grenzwert*

$$\lim_{s\uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{it}{1 - s\varphi(t)} dt \tag{3.2.4}$$

existiert und ist endlich genau dann, wenn dies für den Grenzwert

$$\lim_{s\uparrow 1} \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \hat{f}(-t)e^{ixt}}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t)dt. \tag{3.2.5}$$

der Fall ist.

b) *Setzen wir die Gültigkeit der äquivalenten Bedingungen in (a) voraus, so gilt*

$$\lim_{y\to\pm\infty} \lim_{s\uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{ite^{iyt}}{1 - s\varphi(t)} dt = \mp\sigma^{-2}. \tag{3.2.6}$$

genau dann, wenn

$$\lim_{y\to\pm\infty} \lim_{s\uparrow 1} \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iyt}(1 - e^{ixt})\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t)dt = \pm x\sigma^{-2}J(f) \tag{3.2.7}$$

gilt.

Beweis. (a) Zunächst zeigen wir, dass wir davon ausgehen dürfen, dass wir beim Integral in (3.2.5) ebenfalls zum Integrationsintervall $[-\delta, \delta]$ mit demselben δ wie im zweiten Hauptsatz übergehen können, oder mit anderen Worten, dass der Limes

$$\lim_{s\uparrow 1} \frac{s}{2\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \hat{f}(-t)e^{ixt}}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t)\, dt. \tag{3.2.8}$$

für alle $f \in \mathfrak{F}$ und alle $x \in R$ existiert und endlich ist. Dies folgt daraus, dass der

Integrand in (3.2.8) durch

$$\left|\frac{\hat{g}(-t)J(f)}{1-\varphi(t)}\right| + \left|\frac{\hat{f}(-t)\,e^{ixt}}{1-\varphi(t)}\right| \tag{3.2.9}$$

majorisiert wird und das uneigentliche Integral mit dem Integrationsbereich $[-\delta,\delta]^c$ über letzteren Ausdruck existiert und endlich ist, was aus der absoluten Integrierbarkeit von $\hat{f}$ und $\hat{g}$, zusammen mit der der strengen Nichtarithmetizität von Q folgt.

Sowohl in (3.2.4) als auch in (3.2.5) dürfen wir also von demselben Integrationsintervall $[-\delta,\delta]$ ausgehen und es bleibt zu zeigen, dass entweder beide Grenzwerte in diesen Gleichungen existieren und endlich sind oder keiner der beiden. Aus (3.2.1) und der Näherung $e^{ixt} = 1 + ixt + O(t^2)$ erhalten wir für den Zähler des Integranden in (3.2.5) die erste Taylor-Näherung

$$\hat{g}(-t)J(f) - \hat{f}(-t)e^{ixt} = i\,[K(f) - xJ(f)]\,t + O(t^2). \tag{3.2.10}$$

Bei der Untersuchung des Integrals über $[-\delta,\delta]$ im Hinblick auf Endlichkeit ist gemäß Satz A.2.1 wegen $1/\left|1-\varphi(t)\right| \le C/t^2$ für eine Konstante $C>0$ und genügend kleine t lediglich der Term erster Ordnung von Interesse, so dass aus der Existenz und Endlichkeit des Limes in (3.2.4) also sofort die Endlichkeit in (3.2.5) folgt. Die Gegenrichtung folgt ohne Mühe, indem man f derart wählt, dass $K(f) - xJ(f)$ nicht verschwindet.

(b) Dass die Grenzwerte $s \uparrow 1$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ in beiden Gleichungen existieren und endlich sind, folgt sofort daraus, dass die äquivalenten Bedingungen aus Teil (a) vorausgesetzt werden. Um dies im Falle von Gleichung (3.2.7) nachzuvollziehen genügt die Feststellung, dass der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung gemäß (3.2.3) dem Term $A^s f(x+y) - A^s f(y)$ entspricht und dass in Teil (a) dessen Konvergenz für alle $x, y \in \mathbb{R}$ für $s \uparrow 1$ nachgewiesen wurde.

Beginnen wir auch hier mit der Bemerkung, dass wir in (3.2.7) zu denselben Integrationsgrenzen $[-\delta,\delta]$ übergehen dürfen, die in (3.2.6) vorliegen: Aus dem Riemann-Lebesgue-Lemma A.2.3 folgt nämlich

$$\lim_{y\to\pm\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>\delta} \frac{e^{iyt}(1-e^{ixt})\hat{f}(-t)}{1-\varphi(t)} \varphi(t)\,dt \right) = 0.$$

Dazu sei gesagt, dass $\big(1-e^{ixt}\big)\varphi(t)/\big(1-\varphi(t)\big)$ auf $[\delta,\infty)$ wegen der strengen Nichtarithmetizität von Q gleichmäßig beschränkt ist (☞ (A.2.9)) und daher

$$\frac{\left(1-e^{ixt}\right)\hat{f}(-t)\varphi(t)}{1-\varphi(t)}$$

$\lambda\!\!\lambda$-integrierbar ist. Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass wir o.B.d.A. $\delta > 0$ (auch in (3.2.6)) beliebig klein wählen dürfen, ohne das Grenzwertverhalten für $|y| \to \infty$ zu beeinflussen.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass für ein genügend kleines $\delta > 0$

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{2\pi} \left| -xJ(f) \int_{-\delta}^{\delta} \frac{ite^{iyt}}{1-\varphi(t)}\, dt \; - \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \hat{f}(-t)e^{ixt}}{1-\varphi(t)} \varphi(t)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2.11}$$

gilt. Aus (3.2.1) und den Näherungen $1-e^{ixt} = -ixt+O(t^2)$ und $\varphi(t) = 1+O(t)$ erhalten wir

$$e^{iyt}(1-e^{ixt})\hat{f}(-t)\varphi(t) = e^{iyt}\left(-ixtJ(f) + O(t^2)\right)$$

als erste Näherung für den Zähler in (3.2.7). Die Integranden in (3.2.6) und (3.2.7) sind also bis auf den Faktor $-xJ(f)$ und einen Restterm der Ordnung $O(t^2)$ identisch. Genau genommen müssten wir statt "$O(t^2)$" an dieser Stelle "$O(x^2)\cdot O(t^2)$" schreiben. Dies spielt allerdings für den weiteren Beweis keine wesentliche Rolle und wird zum Zwecke der Übersichtlichkeit unterschlagen. Den Restterm können wir bei der Integration vernachlässigen, wenn wir ein genügend kleines $\delta > 0$ wählen, denn aufgrund der stetigen Fortsetzbarkeit gilt

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{O(t^2)}{1-\varphi(t)} \right| \leq C\delta$$

für eine geeignete Konstante $C > 0$. Man wähle $\delta \leq \varepsilon/2C$, woraus (3.2.11) folgt. Hiermit ist der Beweis des Lemmas abgeschlossen.

□

Der Satz und damit die Äquivalenz des 2. Hauptsatzes und Satz 3.1.4 - mit Ausnahme der Aussage über die lokal gleichmäßige Konvergenz in letzterem Satz - sind somit bewiesen. Diese Ausnahme ist für uns nicht weiter von Bedeutung, da wir mit Hilfe von Satz 3.1.4 den zweiten Hauptsatz beweisen und nicht umgekehrt.

Bemerkung. Die einzige Bedingung an $f \in \mathfrak{F}$, die wir in der Rückrichtung des soeben erbrachten Beweises benötigt haben, war die Möglichkeit, f so zu wählen, dass $K(f) -$

$xJ(f)$ nicht verschwindet. Daher können wir in Satz 3.1.4 für unser Ziel, den zweiten Hauptsatzsatz zu beweisen, o.B.d.A. $f \in \mathfrak{F}^+$ voraussetzen.

Nun beweisen wir, dass Satz 3.1.3 den Rekurrenzsatz impliziert:

Beweis. Wir vergleichen den Term aus Gleichung (Gl. 1) des Rekurrenzsatzes mit dem Term $A^s f(x) + A^s f(-x)$ aus (3.1.5) in seiner fourieranalytischen Schreibweise aus (3.2.2). Im Beweis von Lemma 3.1.2 wurde bereits

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \lim_{s\uparrow 1} \frac{s}{\pi} \int\limits_{|t|>\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t)\, dt \right| < \infty$$

begründet, so dass wir bei der Untersuchung der Endlichkeit dieses Integrals zum Integrationsintervall $[-\delta, \delta]$ mit beliebig kleinem $\delta > 0$ übergehen können.

Wir zeigen nun die Kontraposition:

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) < \infty$$
$$\Rightarrow \limsup_{x\to\infty} \left| \lim_{s\uparrow 1} \frac{s}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t)\, dt \right| < \infty,$$

wobei wir gemäß Lemma 3.1.2 auch

$$\lim_{s\uparrow 1} \frac{s}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - \varphi(t)} \varphi(t)\, dt$$

schreiben können.

Zunächst approximieren wir den Integranden auf der rechten Seite der Implikation wie gewohnt für kleine t:

$$\frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(xt)\hat{f}(-t)}{1 - \varphi(t)} \varphi(t) = \frac{J(f)(1 + O(t^2))\big(1 - \cos(xt)\big)}{1 - \varphi(t)} \varphi(t),$$

weshalb es zu zeigen genügt, dass

$$\limsup_{x\to\infty} \left| \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1 - \cos(xt)}{1 - \varphi(t)} dt \right| < \infty.$$

Für den Realteil des Integranden erhalten wir ohne Mühe

$$0 \leq Re\left(\frac{1-\cos(xt)}{1-\varphi(t)}\right) \leq 2\, Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right). \tag{3.2.12}$$

Aus der Voraussetzung und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt die Existenz und die gleichmäßige Beschränktheit des uneigentlichen Integrals in x.

Untersuche nun den Imaginärteil. Der Anteil

$$Im\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) = \frac{Im\, \varphi(t)}{(1-\varphi(t))\overline{(1-\varphi(t))}}$$

ist eine ungerade Funktion in t, da $Im\, \varphi(t)$ ungerade ist. Ebenso ist

$$\big(1-\cos(xt)\big) Im\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)$$

als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion wieder ungerade. Falls das uneigentliche Integral existiert nimmt es also für alle x den Wert 0 an.

Die Existenz des uneigentlichen Integrals folgt jedoch aus der trivialen Ungleichung

$$Im\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) \leq \left|\frac{1}{1-\varphi(t)}\right|$$

und der stetigen Fortsetzbarkeit von $|1-\cos(xt)|\,/\,|1-\varphi(t)|$ im Punkte 0 mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

3.3. Letzte Vorbereitungen

In diesem letzten Abschnitt vor den Beweisen der Sätze 3.1.3 und 3.1.4 treffen wir einige Vorbereitungen und führen Begriffe ein, auf die wir im Beweisverlauf zurückgreifen werden. Zunächst begründen wir die Stetigkeit des diskontierten Potentialkerns, bevor wir zwei diskontierte Maße einführen, die wir mit Hilfe der Ersteintrittszeit T_B in eine geeignete Menge $B \in \mathcal{B}$ definieren. Unmittelbar im Anschluss an ihre Definition diskutieren wir das Konvergenzverhalten der beiden diskontierten Maße für $s \uparrow 1$. Zum Abschluss dieses Abschnitts werden wir unter Verwendung von T_B noch eine nützliche Zerlegung von $U^s f(x)$ notieren.

Stetigkeit des diskontierten Potentialkerns.
Definieren wir zunächst

$$f_y(x) := f(x-y) \tag{3.3.1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und stellen fest, dass mit f auch $f_y \in \mathfrak{F}$ (bzw. $\mathfrak{F}^+$) ist.

Bemerkung. Wendet man U^s als Funktional auf f_y an, entspricht dies der Anwendung auf f selbst, allerdings mit einem um y "nach links" verschobenen Startwert, und zwar gilt

$$U^s f_y(x) = U^s f(x-y) \tag{3.3.2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies weist man leicht mit Hilfe des Transformationssatzes nach. Aus der Definition von A^s folgt sofort

$$A^s f_y(x) = A^s f(x-y) \tag{3.3.3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.3.1 Satz
Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $0 < s < 1$ ist der diskontierte Potentialkern $A^s f(x)$ stetig in x.

Beweis. Für alle $f \in \mathfrak{F}$, $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned} |A^s f(x+h) - A^s f(x)| &= |A^s (f_{-h} - f)(x)| \\ &= |U^s (f - f_{-h})(x)| \\ &\leq \|f - f_{-h}\|_\infty U^s(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f gilt $\|f - f_{-h}\|_\infty \to 0$ für $h \to 0$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt, da U^s für alle $0 < s < 1$ ein endliches Maß ist. □

Definition der Maßfamilien $(\Pi_B^s(x,\cdot))_{s\in(0,1)}$ und $(G_B^s(x,\cdot))_{s\in(0,1)}$ und Untersuchung der Konvergenz.
Im Folgenden sei $B \in \mathcal{B}$ *relativ kompakt* mit nichtleerem Inneren und

$$T_B := \inf\{n \geq 0 : S_n \in B\} \tag{3.3.4}$$

die Ersteintrittszeit von $(S_n)_{n\geq 0}$ in die Menge B. Aus der Rekurrenz von $(S_n)_{n\geq 0}$ folgt $\mathbb{P}(S_n \in B \text{ u.o.}) = 1$ und damit insbesondere, dass T_B $\mathbb{P}$-f.s. endlich ist.

Wir definieren nun für $0 < s < 1$ das Maß $\Pi_B^s(x,\cdot)$:

$$\Pi_B^s(x,\cdot) := \mathbb{E}_x\left[s^{T_B}\,\mathbb{1}_{\{S_{T_B}\in\,\cdot\,\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{P}_x\left(S_n \in \cdot, T_B = n\right),$$

Wenden wir Π_B^s als Funktional auf eine Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ an, erhalten wir damit

$$\Pi_B^s f(x) = \mathbb{E}_x\left[s^{T_B} f(S_{T_B})\right].$$

Definieren wir weiter

$$G_B^s(x,\,\cdot\,) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} s^n\,\mathbb{1}_{\{S_n\in\,\cdot\,\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} s^n\,\mathbb{P}_x\left(S_n\in\,\cdot\,, T_B \geq n\right)$$

so erhalten wir entsprechend für eine gegebene Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$G_B^s f(x) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} s^n f(S_n)\right].$$

Bemerkung. Offensichtlich gilt für alle $x\in\mathbb{R}$ und $0 < s < 1$

$$\Pi_B^s(x,\cdot) \leq \Pi_B^s(x,\mathbb{R}) = \mathbb{E}_x s^{T_B} \leq 1,$$

d.h. die Gesamtmasse der Maßfamilie $(\Pi_B^s(x,\cdot))_{s\in(0,1)}$ ist gleichmäßig beschränkt, und $(\Pi_B^s)_{s\in(0,1)}$ konvergiert für $s\uparrow 1$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz schwach gegen das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\Pi_B := \Pi_B^1 := \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{T_B}\in\,\cdot\,\}}\right] = \lim_{s\uparrow 1}\Pi_B^s. \tag{3.3.5}$$

Hierzu gleichbedeutend gilt, dass $\Pi_B^s f(x)$ für alle $f\in\mathfrak{C}_b(\mathbb{R})$, d.h. für beschränkte stetige Funktionen $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, für $s\uparrow 1$ gegen $\Pi_B f(x)$ konvergiert.

Dazu entsprechend konvergiert die Maßfamilie $(G_B^s)_{s\in(0,1)}$ für $s\uparrow 1$ vag gegen das

Präokkupationsmaß[2]

$$G_B(x,\,\cdot\,) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} \mathbb{1}_{\{S_n\in\cdot\}}\right]. \tag{3.3.6}$$

Hierfür ist zu zeigen, dass dieses ein lokal endliches Maß ist. Der Beweis der lokalen Endlichkeit von $G_B(x,\cdot)$ bereitet im Fall $\mathbb{E}_x T_B < \infty$ weiterhin keine Mühe. Für nichtnegative $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$ gilt dann nämlich

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} f(S_n)\right] \quad\leq\quad \|f\|_\infty \mathbb{E}_x T_B < \infty.$$

Im Fall, dass die Ersteintrittszeit in B keinen endlichen Erwartungswert besitzt, ist die Sache aber komplizierter.

Zunächst notieren wir die folgenden Minorisierungsbedingungen. Teil (b) des Lemmas bildet unter veränderten Voraussetzungen eine schärfere Version der in Teil (a) formulierten Bedingung. Die Beweise werden wir trotz der Ähnlichkeit der beiden Aussagen auf unterschiedliche Weise führen.

3.3.2 Lemma
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein Random Walk auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ und $K \in \mathcal{B}$ kompakt.

a) Die Zuwachverteilung von $(S_n)_{n\geq 0}$ besitze eine stetige Komponente Q_1. Sei $B \in \mathcal{B}$ eine Menge, deren zugehörige Ersteintrittszeit T_B für alle $x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}_x$-f.s. endlich ist. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und ein $N \geq 0$, so dass die ("schwache") Minorisierungsbedingung

$$\inf_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(T_B \leq N\right) \geq \delta$$

erfüllt ist.

b) Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ nichtarithmetisch und rekurrent. Weiter sei $B \in \mathcal{B}$ eine Menge mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 0$, so dass die ("starke") Minorisierungsbedingung

$$\inf_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(T_B \leq N\right) \geq 1 - \varepsilon$$

gilt.

[2] In der gewöhnlichen Definition des Präokkupationsmaßes beginnt die Summe bei 0 und endet bei $T_B - 1$, d.h. man betrachtet den RW nur vor und nicht mehr während des ersten Eintritts in die Menge B, was uns aber nicht davon abhalten soll, aus Gründen der Anschauung vom Präokkupationsmaß zu sprechen.

Beweis. (a) Nach Voraussetzung gibt es für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mathbb{P}_x (T_B \leq N) \geq 1 - \varepsilon$$

Wähle ε dabei so klein, dass der $\lambda\!\!\lambda$-stetige Anteil der Zuwachsverteilung Gesamtmasse $q > \varepsilon$ besitzt. Es gilt

$$\mathbb{P}_x (T_B \leq N) = \int \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1)\, \mathbb{P}_x (S_1 \in dy) \geq 1 - \varepsilon$$

und wegen

$$\int \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1)\, Q_1(dy - x) \geq q - \varepsilon > 0$$

existiert ein Kompaktum F mit $Q_1(F) =: \delta_1 > 0$, für dass $\inf_{y \in F} \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1) \geq 2\delta_2 > 0$ gilt. Wähle $\delta := \delta_1 \cdot \delta_2$, so dass also

$$\int\limits_F \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1)\, Q_1(dy - x) > 2\delta$$

Zu δ gibt es nun ein $\gamma > 0$, so dass für alle $z \in B_\gamma(x)$

$$|Q_1(F - x) - Q_1(F - z)| < \delta$$

Dann folgt für alle $z \in B_\gamma(x)$ gleichzeitig

$$\begin{aligned}
&\int \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1)\, Q_1(dy - z) \\
&\geq \int\limits_F \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1)\, Q_1(dy - z) \\
&= \int\limits_F \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1)\, Q_1(dy - x) + \int\limits_F \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1) \big(Q_1(dy - z) - Q_1(dy - x)\big) \\
&\geq \int\limits_F \mathbb{P}_y (T_B \leq N-1)\, Q_1(dy - x) - \delta \geq \delta
\end{aligned}$$

Wähle nun eine endliche Überdeckung $\bigcup_{k=0}^n B_{\gamma_k}(x_k)$ von K und N so groß, dass

$$\mathbb{P}_{x_k} (T_B \leq N) \geq 1 - \varepsilon$$

für alle $k = 1, ..., N$ gilt.

(b) Wähle $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ derart, dass $B_{3\delta}(x_0) \subset B$ und definiere $A := B_\delta(x_0)$. Aufgrund der Rekurrenz von $(S_n)_{n\geq 0}$ gilt nach Satz 1.2.3 $\mathbb{P}_x(T_A \leq n) \geq 1-\varepsilon$ für ein abhängig vom Startpunkt $x \in \mathbb{R}$ und von ε gewähltes $n = n(x,\varepsilon)$. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in B_\delta(x)$ gilt also

$$\mathbb{P}_y(T_B \leq n) \geq \mathbb{P}_x(T_A \leq n) \geq 1-\varepsilon,$$

denn aus $A - x \subset B - y$ für alle $y \in B_\delta(x)$ folgt, dass der Ersteintritt von $(S_n)_{n\geq 0}$ in die Menge B bei Start im Punkte y auf keinen Fall nach dem Ersteintrittszeitpunkt in A beim Start im Punkte x erfolgt - unabhängig davon, wo innerhalb von $B_\delta(x)$ der Punkt y liegt. Wähle nun eine endliche Überdeckung $\bigcup_{k=0}^{l} B_\delta(x_k)$ von K und zu jedem der Punkte $x_k \in K$ ein $n_k = n_k(x,\varepsilon)$ wie oben, für das also

$$\mathbb{P}_y(T_B \leq n_k) \geq 1-\varepsilon$$

für alle $y \in B_\delta(x_k)$ erfüllt sei. Mit $N := \max_{1\leq k\leq l} n_k$ folgt dann

$$\inf_{x\in K} \mathbb{P}_x(T_B \leq N) \geq \min_{1\leq k\leq l} \inf_{y\in B_\delta(x_k)} \mathbb{P}_y(T_B \leq N) \geq 1-\varepsilon.$$

□

Hieraus erhalten wir das gewünschte Resultat:

3.3.3 Satz

Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein RW auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, der die Voraussetzungen einer der beiden Minorisierungsbedingung aus Lemma 3.3.2 erfülle. Dann gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} f(S_n)\right] < \infty$$

für alle $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$ bzw. die äquivalente Aussage, dass das Präokkupationsmaß lokal endlich ist.

Beweis. Definieren wir zu einem beliebigen Pfad die Menge

$$C := \{n \geq 0 : S_n \in K, T_B > n\}, \tag{3.3.7}$$

so gilt

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} \mathbb{1}_{\{S_n\in K\}}\right] = \mathbb{E}_x|C|.$$

Definiere für $n \geq 1$ rekursiv die Stoppzeiten

$$T_K^{(1)} := T_K := \inf\{m \geq 0 : S_m \in K\},$$

und

$$T_K^{(n)} := \inf\{m > T_K^{(n-1)} : S_m \in K\},$$

wobei T_K die Ersteintrittszeit von K sei. Nun ist

$$\mathbb{P}\left(T_K < T_B\right) = \mathbb{P}\left(|C| > 0\right) \leq 1,$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass K überhaupt vor B getroffen wird. Unabhängig davon, welches $x \in K$ zuerst getroffen wird, sagen uns die Minorisierungsbedingungen aus Lemma 3.3.2, dass für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ spätestens der $(N+1)$-te Treffer in K (also der N-te Treffer nach dem ersten Treffer) vor dem ersten Treffer in B nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit $\leq 1-\varepsilon$ zustande kommen kann, denn

$$\sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(|C| > N\right) \leq \sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(T_B > N\right) \leq 1-\varepsilon$$

Weiter gilt mit Hinweis auf $|C| > n \Leftrightarrow T_K^{(n)} < T_B$

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(|C| > 2N\right) \\
&\quad = \sup_{x\in K} \int\limits_{\{|C|>N\}} \mathbb{P}\left(|C| > 2N | S_{T_K^{(N)}} = y, T_K^{(N)} < \infty\right) \mathbb{P}_x\left(S_{T_K^{(N)}} \in dy\right) \\
&\quad = \sup_{x\in K} \int\limits_{\{|C|>N\}} \mathbb{P}_y\left(|C| > N\right) \mathbb{P}_x\left(S_{T_K^{(N)}} \in dy\right)
\end{aligned}$$

und damit $\sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(|C| > 2N\right) \leq (1-\varepsilon)^2$. Induktiv folgt

$$\sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(|C| > jN\right) \leq (1-\varepsilon)^j \tag{3.3.8}$$

und insbesondere $\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{P}_x\left(|C| > jN + k\right) \leq (1-\varepsilon)^j$ für alle $1 \leq k < N$. Die Behauptung folgt nun vermöge

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_x|C| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(|C| > j\right) \\
&\leq (N+1) + N\sum_{j=0}^{\infty}(1-\varepsilon)^j < \infty.
\end{aligned}
$$

□

Lokal gleichmäßige Konvergenz von $(\Pi_B^s f(x))_{s\in(0,1)}$ und $(G_B^s f(x))_{s\in(0,1)}$.
Nun zeigen wir, dass die Konvergenz von $\Pi_B^s f(x)$, bzw. $G_B^s f(x)$ für $s \uparrow 1$ bei gegebenen Funktionen $f \in \mathfrak{C}_b(\mathbb{R})$, bzw. $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$, lokal gleichmäßig im Startpunkt x ist.

Aus Lemma 3.3.2 folgern wir zuerst das gewünschte Resultat für die Folge $(\Pi_B^s f(x))_{s\in(0,1)}$. Der Leser sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass auf den folgenden Seiten das Supremum $\|f\|_\infty$ einer beschränkten Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\|f\|$ abgekürzt wird:

3.3.4 Satz

Sei $f \in \mathfrak{C}_b(\mathbb{R})$. Dann konvergiert $\Pi_B^s f(x)$ für $s \uparrow 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\Pi_B f(x)$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.

Beweis. Die Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ wurde im letzten Absatz nachgewiesen. Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$, eine Funktion $f \in \mathfrak{C}_b(\mathbb{R})$ (o.B.d.A. $f \neq 0$) und $0 < s < 1$ gilt, da $1 - s^k \geq 0$ für alle $k \geq 0$,

$$
|\Pi_B f(x) - \Pi_B^s f(x)| \leq \|f\| \mathbb{E}_x \left[1 - s^{T_B}\right].
$$

Wähle zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gemäß dem vorangegangenen Lemma $N \geq 0$ derart, dass $\inf_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(T_B \leq N\right) \geq 1 - \|f\|^{-1}\varepsilon/2$, bzw. $\sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(T_B > N\right) < \|f\|^{-1}\varepsilon/2$ gilt. Dann lässt sich fortfahrend ein $s_0 \in (0,1)$ wählen, so dass $1 - s^k < \|f\|^{-1}\varepsilon/2$ für alle $s_0 < s < 1$ und $0 \leq k \leq N$ gilt, woraus

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in K} \mathbb{E}_x\left[1 - s^{T_B}\right] &\leq \sup_{x\in K} \left| \left\{ \sum_{k=0}^{N} (1-s^k)\mathbb{P}_x\left(T_B = k\right) \right\} + \mathbb{P}_x\left(T_B > N\right) \right| \\
&\leq \sup_{x\in K} \left| \|f\|^{-1} \frac{\varepsilon}{2}\, \mathbb{P}_x\left(T_B \leq N\right) + \mathbb{P}_x\left(T_B > N\right) \right| \leq \|f\|^{-1}\varepsilon
\end{aligned}
$$

und somit

$$\sup_{x\in K} |\Pi_B f(x) - \Pi_B^s f(x)| < \varepsilon,$$

also die lokal gleichmäßige Konvergenz von Π_B^s folgt. $\square$

Bemerkung. In Satz 3.3.4 genügt als Voraussetzung an die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ offenbar, dass f auf B beschränkt ist. Der Beweis behält nämlich seine Gültigkeit, wenn wir $\|f\|$ durch $\|f|_B\|$ ersetzen. Da die Menge B beschränkt ist, ist weitergehend also bereits hinreichend, dass f auf $\overline{B}$ stetig ist.

In Bezug auf die Konvergenz von $(G_B^s f(x))_{s\in(0,1)}$ notieren wir das entsprechende Resultat, das wir mit dem folgenden Lemma einleiten:

3.3.5 Lemma

Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein nichtarithmetischer, rekurrenter RW auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge, $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$ eine nichtnegative Funktion und $\gamma > 0$ beliebig klein. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{x\in K} \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=N+1}^{T_B} f(S_n) \right] < \gamma.$$

Beweis. Sei o.B.d.A. der Träger von f in K enthalten. Wähle $N \in \mathbb{N}$ gemäß Lemma 3.3.2, so dass nach einer der dortigen Minorisierungsbedingungen

$$\sup_{x\in K} \mathbb{P}_x (T_B > N) \leq 1 - \varepsilon.$$

gilt. Wir gehen ähnlich wie im Beweis von 3.3.3 vor. Definiere analog zur dort in (3.3.7) definierten Menge C die Menge D durch

$$D := \{n \geq 0 : S_n \in K, T_B > n \vee (M+1)\} \subset C.$$

Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \left[\sum_{n=M+1}^{T_B} f(S_n) \right] &\leq \|f\| \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=M+1}^{T_B} \mathbb{1}_K(S_n) \right] \\
&\leq \|f\| \mathbb{E}_x |D| \\
&= \|f\| \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_x (|D| > k) \\
&\leq \|f\| N \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_x (|D| > kN)
\end{aligned}$$

Da die Voraussetzungen der starken Minorisierungsbedingung aus Lemma 3.3.2 erfüllt sind, folgt aus (3.3.8) für alle $j \geq 0$

$$\sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(|D| > jN\right) \leq \sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(|C| > jN\right) \leq (1-\varepsilon)^j,$$

denn es gilt $|D| \leq |C|$ für jede Realisierung von $(S_n)_{n\geq 0}$. Wegen der Konvergenz der hierüber gebildeten Reihe gilt

$$\|f\| N \sum_{j\geq L} \sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(|D| > jN\right) < \frac{\gamma}{2}$$

für ein genügend großes $L \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt

$$\|f\| N \sum_{j<L} \sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(|D| > jN\right) \leq \|f\|\, N \cdot L \sup_{x\in K} \mathbb{P}_x\left(T_B > M+1\right) < \frac{\gamma}{2}$$

für ein genügend großes $M \in \mathbb{N}$, wobei die starke Minorisierungsbedingung aus Teil (b) von Lemma 3.3.2 genutzt wurde. □

3.3.6 Satz

Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein RW, der die Voraussetzungen aus Lemma 3.3.5 erfüllt und $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$. Dann konvergiert $G_B^s f(x)$ für $s \uparrow 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $G_B f(x)$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.

Beweis. O.B.d.A. sei f nichtnegativ und $f \neq 0$. Die punktweise Konvergenz wurde bereits in Satz 3.3.3 gezeigt, weshalb wir gleich zum Nachweis der lokal gleichmäßigen Konvergenz schreiten. Sei $\varepsilon > 0$ und $0 \neq f \in \mathfrak{C}_0$ eine nichtnegative Funktion und $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Nach Lemma 3.3.5 gilt

$$\sup_{x\in K} \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=M+1}^{T_B} f(S_n)\right] < \gamma,$$

für ein beliebig kleines $\gamma > 0$ mit $\gamma < \varepsilon/2$ und ein - abhängig von γ - genügend großes $M \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K} |G_B f(x) - G_B^s f(x)| &\leq \sup_{x\in K} \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} (1-s^n)\, f(S_n)\right] \\
&< \sup_{x\in K} \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B\wedge M} (1-s^n)\, f(S_n)\right] + \gamma
\end{aligned}$$

$$< \sup_{x \in K} \|f\| \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=1}^{M} (1 - s^n) \right] + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle $s_0 \in (0,1)$ so groß, dass für alle $s_0 < s < 1$ und alle $0 \leq k \leq M$

$$1 - s^k < \|f\|^{-1} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{M}$$

gilt. □

Eine Zerlegung von $U^s f(x)$ bezüglich der Stoppzeit T_B.
Zuletzt zerlegen wir mit Hilfe von T_B das diskontierte Erneuerungsmaß, bzw. $U^s f(x)$ für Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dabei erhalten wir die folgende nützliche Identität, die wir unter Nutzung der Maße G_B^s und Π_B^s elegant schreiben können. Sei $f \in \mathfrak{F}$, $x \in \mathbb{R}$ und $0 < s < 1$, so gilt

$$U^s f(x) = G_B^s f(x) + \Pi_B^s U^s f(x). \tag{3.3.9}$$

Dies sieht man vermöge der Rechnung

$$\begin{aligned}
U^s f(x) &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{n \geq 1} s^n f(S_n) \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=1}^{T_B} s^n f(S_n) \right] + \mathbb{E}_x \left[\sum_{n \geq 1} s^{T_B + n} f(S_{T_B+n}) \right] \\
&= G_B^s f(x) + \int \mathbb{E} \left(\sum_{n \geq 1} s^{T_B+n} f(S_{T_B+n}) \big| S_{T_B} = y \right) \mathbb{P}_x^{S_{T_B}} (dy) \\
&= G_B^s f(x) + \mathbb{E}_x \left[s^{T_B} \, \mathbb{E}_{S_{T_B}} \left[\sum_{n \geq 1} s^n f(S_n) \right] \right] \\
&= G_B^s f(x) + \Pi_B^s U^s f(x),
\end{aligned}$$

deren vorletzte Zeile aus der starken Markov-Eigenschaft via [4], 27.1, folgt.

4. Beweis der Hauptsätze

4.1. Ein kurzer Vergleich mit dem arithmetischen Fall

In diesem kurzen Abschnitt wird zusammengefasst, wie in [12] beim Beweis des Rekurrenzsatzes im Falle arithmetischer RWs vorgegangen wird. Dabei zeigen wir, dass der Rekurrenzsatz völlig analog zu den Ausführungen aus Abschnitt 3.1 umformuliert wird. Anschließend fassen wir zusammen, wie die Umformulierung des Satzes im arithmetischen Fall bewiesen wird und geben einen Vorblick auf Abschnitt 4.4, in dem der Beweis des nichtarithmetischen Falls durchgeführt wird, und zeigen, dass sich die entscheidenden Stellen in den Beweisen entsprechen.

Im Falle eines eindimensionalen 1-arithmetischen RWs lautet der Rekurrenzsatz:

“Ein 1-arithmetischer RW $(S_n)_{n\geq 0}$ auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ mit Zuwachsverteilung Q und zugehöriger F.T. φ ist genau dann rekurrent, wenn

$$\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) = \infty$$

gilt.”

Sei also $(S_n)_{n\geq 0}$ 1-arithmetisch. In Analogie zum Potentialkern definieren wir die Funktion a durch

$$a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbb{P}_0^{S_n}(\{0\}) - \mathbb{P}_x^{S_n}(\{0\})\right], \tag{4.1.1}$$

und vollziehen mit dem abelschen Grenzwertsatz (☞ [8], S. 252 f.) die Umformung

$$\begin{aligned} a(x) &= \lim_{s\uparrow 1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}_0^{S_n}(\{0\}) - \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}_x^{S_n}(\{0\})\right] \\ &= \lim_{s\uparrow 1}\left[U_0^s(\{0\}) - U_x^s(\{0\})\right]. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Hierdurch erhält man eine schöne Interpretation des Ausdrucks: Es liegt die Differenz zwischen den erwarteten Erneuerungen im Punkte 0 vor, wenn man einmal von x und einmal von 0 aus startet.

Mit der Funktion a lässt sich der Rekurrenzsatz im arithmetischen Fall analog zu Satz 3.1.3 gemäß [12], S. 85, zu

$$\lim_{x\to\infty} a(x) + a(-x) = \infty, \tag{4.1.3}$$

umformulieren, wobei der Ausdruck $a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und endlich ist (☞ [12], T28.1), was wiederum in Analogie zum ersten Teil von Satz 3.1.4 steht.

Nun geben wir die in [12] für den arithmetischen Fall ausgeführte Skizze des Beweises des Rekurrenzsatzes wieder, deren Schema auch im folgenden Kapitel beim Beweis des Rekurrenzsatzes verfolgt wird. Zunächst sei erwähnt, dass $a(x) + a(-x)$ identisch mit dem Präokkupationsmaß von $\{0\}$ an der Stelle x ist (☞ [12], P 29.4). Somit entspricht der Ausdruck den erwarteten Anzahl von Besuchen eines Random Walks bei seinem Startpunkt x vor dem ersten Erreichen des Ursprung und es gilt

$$a(x) + a(-x) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{T_0-1} \mathbb{1}_{\{S_n=x\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(S_n = x, T_0 > n\right)$$

und es gilt $T_0 = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0\}$. Indem wir die Reihe bei einem beliebig großen $N \in \mathbb{N}$ abbrechen, erhalten wir

$$\begin{aligned} a(x) + a(-x) &\geq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_x\left(S_n = x, T_0 > n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \left(\mathbb{P}_x\left(S_n = x\right) - \mathbb{P}_x\left(S_n = x, T_0 \leq n\right)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \left(\mathbb{P}_0\left(S_n = 0\right) - \mathbb{P}_x\left(S_n = x, T_0 \leq n\right)\right) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

und somit für $x \to \infty$, da der zweite Term in der Summe für feste n gegen 0 konvergiert

$$\liminf_{x\to\infty}[a(x) + a(-x)] \geq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_0^{S_n}\left(\{0\}\right)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Aus der Rekurrenz folgt die uneigentliche Konvergenz gegen ∞: Für jede Schranke können wir N so groß wählen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der

Ungleichung (4.1.4) die Schranke beim Grenzübergang $x \to \infty$ überschreitet.

Stones Beweis des Rekurrenzsatzes verläuft ähnlich. Dort wird gezeigt, dass sich der Ausdruck $Af(x) + Af(-x)$ asymptotisch wie $G_B f_x(x)$ verhält und damit für große x dieselbe probabilistische Bedeutung besitzt, wie im arithmetischen Fall: Nehmen wir an, dass f annähernd mit der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_K$ einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ übereinstimmt, erhalten wir, dass $G_B f_x(x) \approx G_B \mathbb{1}_{K+x}(x)$ den Erwartungswert der Eintritte in $K + x$ bezeichnet, wenn man in x startet und die Menge B dabei festhält, so dass sich der Abstand des Startpunktes zu K im Gegensatz zum Abstand zur Menge B nicht verändert. Etwas verständlicher formuliert handelt es sich bei $G_B \mathbb{1}_{K+x}(x)$, wie wir in Lemma 4.4.5 zeigen, um die Anzahl erwarteter Eintritte des zu $(S_n)_{n\geq 0}$ gehörigen SRWs in die Menge K vor dem ersten Eintritt in die Menge $B - x$:

$$G_B f_x(x) = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{n=1}^{T_{B-x}} f(S_n) \right]. \tag{4.1.5}$$

Für $x \to \infty$ folgt die uneigentliche Konvergenz von $Af(x) + Af(-x)$ gegen ∞.

4.2. Beweise im Spezialfall endlicher Varianz

In diesem Abschnitt werden wir zwei Hilfsresultate herleiten, die im Spezialfall eines Random Walks, dessen Zuwächse endliche Varianz besitzen, gleichzeitig Beweise der Sätze 3.1.3 und 3.1.4 bilden. Die beiden Hauptresultate sind Lemma 4.2.1 und 4.2.8.

> Da wir gemäß Abschnitt 2.1 nur noch die Rückrichtung des Rekurrenzsatzes zu zeigen haben, setzen wir im Folgenden als Generalvoraussetzung voraus, dass $(S_n)_{n\geq 0}$ ein rekurrenter Random Walk ist und bezeichnen stets, falls nicht explizit definiert, mit Q seine Zuwachsverteilung, deren Varianz mit σ^2, sowie mit φ die Fourier-Transformierte von Q. Die Verteilung Q sei außerdem stets streng nichtarithmetisch, wovon wir gemäß Abschnitt 2.2 ausgehen können.

Vereinbaren wir $\infty^{-1} := 0$ und beginnen mit dem folgenden Lemma, aus dem im Falle einer Zuwachsverteilung mit endlicher Varianz Satz 3.1.3 und damit der Rekurrenzsatz folgt.

4.2.1 Lemma
Sei $\sigma^2 \in (0, \infty]$. *Für alle* $f \in \mathfrak{F}$ *gilt*

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1} \lim_{s\uparrow 1}(A^s f(y) + A^s f(-y)) = 2\sigma^{-2} J(f). \tag{4.2.1}$$

Beweis. Beim Beweis gehen wir analog zum Beweis im arithmetischen Fall in [12] auf S. 345 f. vor. An dieser Stelle geben wir aus Gründen der Übersichtlichkeit lediglich einen Überblick, der vollständige Beweis befindet sich in Anhang B.1. Sei o.B.d.A. $J(f) = 1$. Für beide Aussagen können wir unter Hinweis auf die strenge Nichtarithmetizität von Q und wegen $f, g \in \mathfrak{F}$ das Integral (3.2.2) innerhalb beliebig kleiner Grenzen $[-\delta, \delta]$ betrachten (s. auch (A.2.9)). Gleichung (4.2.1) lautet dann in fourieranalytischer Schreibweise

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos yt \hat{f}(-t)}{1-\varphi(t)} \varphi(\theta)\, dt = 2\sigma^{-2},$$

wobei wir bereits den Grenzübergang $s \uparrow 1$ gemäß Lemma 3.1.2 vollzogen haben. Für den Beweis unterscheiden wir die Fälle $\sigma^2 < \infty$ und $\sigma^2 = \infty$. Der entscheidende Punkt im Beweis ist die Untersuchung von $t^2/\big(1-\varphi(t)\big)$ für $t \to 0$. Im Falle endlicher Varianz ergibt sich der Grenzwert aus Satz A.1.5 und zwar gilt $t^2/\big(1-\varphi(t)\big) \xrightarrow{t\to 0} 2\sigma^{-2}$, da aufgrund der Rekurrenz des RWs das erste Moment seiner Zuwachsverteilung verschwindet. Dass dies auch im Falle unendlicher Varianz (mit $\infty^{-1} = 0$) gilt, sagt uns die Bemerkung im Anschluss an Satz A.2.1.

Mit einigem technischen Aufwand gewinnen wir aus dieser Konvergenzaussage in Anhang B.1 den Beweis. □

Wie erwähnt folgt aus Lemma 4.2.1 bereits der folgende Spezialfall des Rekurrenzsatzes:

"Für einen rekurrenten RW, dessen Zuwachsverteilung endliche Varianz σ^2 *besitzt, gilt*

$$\int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) dt = \infty,$$

wobei $\delta > 0$ *hinreichend klein sei, so dass* $|\varphi(t)| < 1$ *für alle* $0 < |t| \leq \delta$*."*

Als nächstes zeigen wir den ersten Teil von Satz 3.1.4, die lokal gleichmäßige Konvergenz $A^s f(x) \uparrow Af(x)$ für $s \uparrow 1$, unter derselben Einschränkung.

Zunächst erwähnen wir dazu ein Resultat, das uns nicht verwundern sollte, wenn wir bedenken, dass der diskontierte Potentialkern in (3.1.3) mit Hilfe des diskontierten Erneuerungsmaßes definiert wurde und dieses, als Operator auf reellwertige Funktionen angewendet, Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ annimmt.

4.2.2 Proposition

Für alle $0 < s < 1$ und $f \in \mathfrak{F}$ verschwindet der Imaginärteil von $A^s f(x)$. In fourieranalytischer Schreibweise gilt also

$$A^s f(x) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Re \left(\frac{(\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t))\,\varphi(t)}{1 - s\varphi(t)} \right) dt \tag{4.2.2}$$

Beweis. Betrachten wir den Ausdruck $A^s f(x)$ in seiner Form (3.1.9). Für alle $0 < s < 1$ und $x \in \mathbb{R}$ ist der Integrand in 0 stetig fortsetzbar und das uneigentliche Integral über $(-\infty, \infty)$ existiert und ist endlich. Sei $\tilde{Z}(x,t) := \hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t)$. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass der Imaginärteil des Integranden eine ungerade, stetige Funktion ist. Vermöge $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$ (s. Satz A.1.2) und der hieraus folgenden Tatsache, dass $Re\,\varphi(t)$ gerade und $Im\,\varphi(t)$ ungerade ist, vollziehen wir die Umformung:

$$\begin{aligned}
& Im \left(\frac{\tilde{Z}(x,t)\varphi(t)}{1 - s\varphi(t)} \right) \\
= \;& \frac{Im\,\tilde{Z}(x,t)\ Re\left(\varphi(t)\overline{(1 - s\varphi(t))}\right) + Re\,\tilde{Z}(x,t)\ Im\left(\varphi(t)\overline{(1 - s\varphi(t))}\right)}{(1 - s\varphi(t))\overline{(1 - s\varphi(t))}} \\
= \;& \frac{Im\,\tilde{Z}(x,t)\ \left(Re\,\varphi(t)(1 - sRe\,\varphi(t)) - sIm\,\varphi(t) Im\,\varphi(-t)\right)}{(1 - s\varphi(t))(1 - s\varphi(-t))} \\
& + \frac{Re\,\tilde{Z}(x,t)\ \left(Im\,\varphi(t)(1 - sRe\,\varphi(t)) + sRe\,\varphi(t) Im\,\varphi(-t)\right)}{(1 - s\varphi(t))(1 - s\varphi(-t))}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir den Ausdruck am Ende der Rechnung: Die Nennerterme, sowie der Term, der im Zähler des ersten Bruchs in der Klammer steht, sind offensichtlich gerade in t, während der Term, der im Zähler des zweiten Bruches in der Klammer steht, ungerade in t ist. Die Behauptung kann der Leser nun einfach verifizieren, indem er mittels (A.1.2), (c), nachvollzieht, dass $Re\,\tilde{Z}(x,t)$ gerade und $Im\,\tilde{Z}(x,t)$ ungerade in t ist. □

Bei der folgenden Analyse verwenden wir für den Zählerterm von $Af(x)$ in der fourieranalytischen Darstellung (3.1.9) die Bezeichnung

$$Z(x,t) = \big(\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t)\big)\varphi(t).$$

Die erste Taylornäherung von $Z(x,t)$ lautet

$$\begin{aligned} Z(x,t) &= \big[\big(1+O(t^2)\big)J(f) - e^{ixt}\big(J(f) - itK(f) + O(t^2)\big)\big]\,(1+O(t)) \\ &= \big[J(f)(1-e^{ixt}) + iK(f)\,t\,e^{ixt} + O(t^2)\big]\,(1+O(t)) \qquad (4.2.3)\\ &= J(f)(1-e^{ixt}) + iK(f)\,t\,e^{ixt} + O(t^2) \\ &= J(f)\big(1-\cos(xt)\big) + i\big(K(f)\,t\cos(xt) - J(f)\sin(xt)\big) + O(t^2), \end{aligned}$$

wobei für $\hat{f}$ und $\hat{g}$ die Näherung aus Gleichung (3.2.1) verwendet wurde.

Bemerkung. Sei $f \in \mathfrak{F}$ gegeben. Ausführlich geschrieben gilt mit Blick auf Gleichung (4.2.2)

$$\begin{aligned} A^s f(x) &= \frac{s}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Re\left(\frac{Z(x,t)}{1-s\varphi(t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{s}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Re\,Z(x,t)\,Re\left(\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right)\,\mathrm{d}t - \frac{s}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Im\,Z(x,t)\,\frac{sIm\,\varphi(t)}{|1-s\varphi(t)|^2}\,\mathrm{d}t \\ &=: \frac{s}{2\pi}\big(I_1^s(x) - I_2^s(x)\big) \end{aligned}$$

Bevor wir die Konvergenz des Termes $A^s f(x)$, bzw. der Zerlegung $I_1^s(x) - I_2^s(x)$ untersuchen, notieren wir ein einfaches technisches Lemma.

4.2.3 Lemma

Sei $\delta > 0$ beliebig, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ eine stetige Funktion und $(h_s)_{s\in(0,1)}$ eine Familie von Funktionen aus $L_1(\mathbb{R})$ mit

$$h_s \xrightarrow{L_1} h$$

für $s \uparrow 1$ und eine Grenzfunktion $h \in L_1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\lim_{s\uparrow 1}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x,t)h_s(t)dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x,t)h(t)dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Es gilt

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} f(x,t)h_s(t)dt - \int_{-\delta}^{\delta} f(x,t)h(t)dt \right| \leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x,t)| \, |h_s(t) - h(t)| \, dt$$

und $|f|$ nimmt auf $K \times [-\delta, \delta]$ aufgrund der Stetigkeit ein Maximum an, woraus die lokal gleichmäßige Konvergenz gegen 0 und damit die Behauptung folgt. □

4.2.4 Lemma

Für jedes $\delta > 0$ gilt

$$h_s(t) := \frac{t^2}{1 - s\varphi(t)} \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(t) \xrightarrow[s\uparrow 1]{L_1} \frac{t^2}{1 - \varphi(t)} \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(t) =: h(t)$$

Beweis. Der rein technische Beweis befindet sich zugunsten der Lesbarkeit im Anhang (☞ Anhang B.2). □

Als letzte Vorbereitung zeigen wir, dass wir bei der Untersuchung der Endlichkeit von $\lim_{s\uparrow 1} A^s f(x)$ bei der fourieranalytischen Darstellung von $A^s f(x)$ zu beliebig kleinen Integrationsgrenzen übergehen können. Dasselbe gilt auch für die beiden Integrale I_1^s und I_2^s, in die wir den Ausdruck in jener Darstellung zerlegt hatten.

4.2.5 Proposition

Sei $f \in \mathfrak{F}$ und $\delta > 0$. Dann konvergiert

$$\tilde{A}^s f(x) = \frac{s}{2\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{\big(\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t)\big)\varphi(t)}{1 - s\varphi(t)} dt$$

gleichmäßig in x gegen

$$\tilde{A} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{\big(\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t)\big)\varphi(t)}{1 - \varphi(t)} dt$$

und $\tilde{A} f(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ endlich.

Beweis. Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt aus der strengen Nicht-arithmetizität von Q und aus $\hat{f}, \hat{g} \in L_1(\mathbb{R})$ vermöge (A.2.9) durch eine Standardabschätzung sofort die Existenz und Endlichkeit des Grenzwertes für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $\big(1-s\varphi(t)\big)-s\big(1-\varphi(t)\big) = 1-s$ sehen wir, indem wir den Ausdruck auf einen Hauptnenner bringen

$$\left|\tilde{A}^s f(x) - \tilde{A} f(x)\right| = \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{|t|>\delta} \frac{1-s}{1-s\varphi(t)} \frac{\big(\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t)\big)\varphi(t)}{1-\varphi(t)} dt \right|$$

Aus der Dreiecksungleichung und $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$ folgt für $0 \leq s \leq 1$

$$|1 - s\varphi(t)| \geq 1 - s\,|\varphi(t)|$$

Gemäß (A.2.8) gilt $\kappa := \sup\{|\varphi(t)| : |t| > \delta\} < 1$ und aus der Standardabschätzung folgt

$$\left|\tilde{A}^s f(x) - \tilde{A} f(x)\right| \quad \leq \quad \frac{1-s}{1-s\kappa} \int\limits_{|t|>\delta} \frac{\big|J(f)\hat{g}(-t)\big| + \big|\hat{f}(-t)\big|}{1-\kappa} dt.$$

Weil $\hat{f}$ und $\hat{g}$ absolut integrierbar sind folgt für $s \uparrow 1$ die gleichmäßige Konvergenz gegen 0. □

4.2.6 Lemma

Sei $\sigma^2 < \infty$ und $f \in \mathfrak{F}$. Dann konvergieren die Integrale $I_1^s(x)$ und $I_2^s(x)$ für $s \uparrow 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen einen endlichen Grenzwert und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine beliebige kompakte Menge und $0 < s < 1$. Gemäß Proposition 4.2.5 dürfen wir bei den Integralen $I_1(x)$ und $I_2(x)$ o.B.d.A. zu einem Integrationsintervall $[-\delta, \delta]$ übergehen, bei dem $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden darf.

Die lokal gleichmäßigen Konvergenz von $I_1^s(x)$ für $s \uparrow 1$ können wir folgern, nachdem wir den Integranden für $t \neq 0$ zu

$$Re\, Z(x,t)\; Re\left(\frac{1}{1-s\varphi(t)}\right) = \frac{Re\, Z(x,t)}{t^2}\; Re\left(\frac{t^2}{1-s\varphi(t)}\right)$$

umgeformt haben. Einerseits erhalten wir aus der Taylornäherung (4.2.3) und der stetigen Fortsetzbarkeit von $\big(1-\cos(xt)\big)/t^2$, dass $Re\, Z(x,t)/t^2$ in 0 stetig fortsetzbar ist und andererseits konvergiert der Term $Re\big(t^2/(1-s\varphi(t))\big)$ in L_1 gegen $Re\big(t^2/(1-\varphi(t))\big)$ (☞ Lemma 4.2.4) und aus Lemma 4.2.3 folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz von $I_1^s(x)$ gegen einen endlichen Grenzwert.

Die gewünschte Aussage für $I_2^s(x)$ erhalten wir - wiederum mit Satz A.2.1 bei Wahl einer passenden Konstanten $C > 0$ - vermöge

$$\begin{aligned} Im\, Z(x,t)\,\frac{sIm\,\varphi(t)}{|1-s\varphi(t)|^2} &= \frac{Im\, Z(x,t)}{t}\cdot s\,\frac{t\,Im\,\varphi(t)}{|1-s\varphi(t)|^2} \\ &= \frac{Im\, Z(x,t)}{t}\cdot s\,\frac{t^4}{|1-s\varphi(t)|^2}\cdot\frac{Im\,\varphi(t)}{t^3} \\ &=: \frac{Im\, Z(x,t)}{t}\cdot h_s(t) \end{aligned}$$

für alle $t \neq 0$. Wie man leicht aus Lemma 4.2.4 folgert, konvergiert h_s in L_1, wobei man die $\lambda\!\!\lambda$-Integrierbarkeit von $Im\,\varphi(t)/t^3$, die in Lemma A.2.2 gezeigt wird, nutze. Hierzu sei angemerkt, dass aufgrund der Rekurrenz und weil wegen $\sigma^2 < \infty$ insbesondere das 1. Moment von Q existiert, die Zuwächse des RWs notwendigerweise zentriert und somit die Voraussetzungen von Lemma A.2.2 erfüllt sind.

Aufgrund der stetigen Fortsetzbarkeit von $Im\, Z(x,t)/t$ in 0 folgt aus Lemma 4.2.3 die lokal gleichmäßige Konvergenz. □

Der erste Teil des umformulierten zweiten Hauptsatzes (Gleichung (3.1.6)) ist somit für den Fall endlicher Varianz bewiesen:

4.2.7 Korollar
Sei $\sigma^2 < \infty$ und $f \in \mathfrak{F}$. Dann existiert

$$\begin{aligned} Af(x) &:= \lim_{s\uparrow 1} A^s f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Re\left(\frac{\big(\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t)\big)\varphi(t)}{1-\varphi(t)}\right)dt \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und ist endlich. Die Konvergenz ist auf kompakten Mengen gleichmäßig.

Im folgenden Lemma legen wir die Grundlage für den Beweis der Aussage (3.1.7) aus Satz 3.1.4 im Falle endlicher Varianz. Wie wir später in Korollar 4.5.8 sehen werden, ist die folgende Aussage über das asymptotische mittlere Steigungsverhalten von Af eine notwendige Bedingung für (3.1.7).

4.2.8 Lemma

Sei $\sigma^2 < \infty$ und $f \in \mathfrak{F}$. Dann gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} y^{-1} Af(y) = \pm\sigma^{-2} J(f). \tag{4.2.5}$$

Beweis. Wir ergänzen den Ausdruck in (4.2.5) durch Subtraktion von $y^{-1}Af(0)$ und betrachten also die Asymptotik des durchschnittlichen Wachstums von Af. Das Grenzverhalten wird hierdurch natürlich nicht beeinflusst. Ohne Mühe erhalten wir für $Af(y) - Af(0)$ die Darstellung

$$Af(y) - Af(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Re\left(\frac{(1-e^{iyt})\hat{f}(-t)\varphi(t)}{1-\varphi(t)}\right) dt. \tag{4.2.6}$$

Zuerst zeigen wir in Anhang B.3 (☞ Aussage 1), dass

$$\lim_{|y|\to\infty}\left[\frac{Af(y)-Af(0)}{y} - \frac{J(f)}{2\pi y}\int\limits_{-1}^{1} Re\left(\frac{1-e^{iyt}}{1-\varphi(t)}\right) dt\right] = 0. \tag{4.2.7}$$

Als nächstes betrachten wir das Integral, das in (4.2.7) auf der rechten Seite der Gleichung steht, und lösen den Realteil auf:

$$\int\limits_{-1}^{1} Re\left(\frac{1-e^{iy\theta}}{1-\varphi(\theta)}\right) d\theta = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1-\cos y\theta)Re(1-\varphi(\theta)) + \sin y\theta Im\,\varphi(\theta))}{|1-\varphi(\theta)|^2} d\theta$$

In Anhang B.3 (☞ Aussage 2) untersuchen wir das Grenzverhalten summandenweise und erhalten die Aussagen (B.3.4) und (B.3.5) und damit die Konvergenz des Ausdrucks gegen $\pm\sigma^{-2}$, womit der zweite Teil des Lemmas, Gleichung (4.2.5), gezeigt ist. □

Bemerkung. Aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz $A^s f(x) \to Af(x)$ für $s \uparrow 1$ zusammen mit der Stetigkeit von $A^s f(x)$ folgt die Stetigkeit von $Af(x)$.

4.3. Konvergenz des diskontierten Potentialkerns im allgemeinen Fall

Nun betrachten wir den Fall, dass Q endliche Varianz σ^2 besitzt, und unser erstes Teilziel ist der Nachweis der Konvergenz von $A^s f(x)$ $(s \uparrow 1)$ gegen einen endlichen Grenzwert. Zunächst wird uns dies allerdings nur in Abhängigkeit von der Wahl der Folge gelingen (s. Lemma 4.3.4). Spalten wir den Ausdruck $A^s f(x)$ dazu zunächst auf, und zwar gilt:

$$A^s f(x) = D^s f(x) - d^s \left(xJ(f) - K(f)\right)$$

mit

$$d^s := \frac{s}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{it}{1 - s\varphi(t)} \mathrm{d}t, \tag{4.3.1}$$

sowie

$$\begin{aligned} D^s f(x) &:= A^s f(x) + d^s \left(xJ(f) - K(f)\right) \\ &= c^s J(f) - U^s f(x) + d^s \left(xJ(f) - K(f)\right), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

wobei D^s also wie A^s als ein Operator auf $\mathfrak{F}$ definiert ist. Die nach $s \in (0,1)$ parametrisierte Konstante $c^s = U^s g(0)$ stammt hierbei aus der Definition des Potentialkerns (Definition 3.1.1). Der Term $d^s \left(xJ(f) - K(f)\right)$ in der Definition von D^s sorgt dafür, dass der Zählerterm eliminiert wird, der in der fourieranalytischen Schreibweise (3.1.9) von $A^s f(x)$ in der Ordnung $O(t)$ im Zähler auftritt, wodurch wir die stetige Fortsetzbarkeit des dort auftretenden Integranden gewinnen. Hiermit werden wir die lokal gleichmäßige Konvergenz von $D^s f$ für $s \uparrow 1$ nachweisen.

Bemerkung. Für das Verständnis einiger der folgenden Operatorgleichungen ist es sinnvoll, $D^s f(x)$ in der Form

$$D^s f(x) = A^s f(x) + d^s \left(J(f)\, id_{\mathbb{R}}(x) - K(f) \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)\right) \tag{4.3.3}$$

zu schreiben, wobei $id_{\mathbb{R}}$ die identische Abbildung auf $\mathbb{R}$ sei.

Nun untersuchen wir die Konvergenz von d^s und die des Ausdrucks $D^s f(x)$ für $f \in \mathfrak{F}$ und $x \in \mathbb{R}$.

4.3.1 Lemma

Sei $f \in \mathfrak{F}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert der Grenzwert

$$Df(x) := \lim_{s \uparrow 1} D^s f(x) \tag{4.3.4}$$

und ist für alle $x \in \mathbb{R}$ endlich. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.

Beweis. Mit Blick auf die Darstellung (3.1.9) von $A^s f(x)$ und die Definition von d^s in (4.3.1) erhalten wir die fourieranalytische Darstellung

$$\begin{aligned} D^s f(x) \quad &= \quad \frac{s}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\left(\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t)\right)\varphi(t) + it\,(xJ(f) - K(f))}{1 - s\varphi(t)} dt \\ &\quad + \frac{s}{2\pi} \int_{|t|>1} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

von $D^s f(x)$.

Untersuchen wir das Konvergenzverhalten für $s \uparrow 1$ im Hinblick darauf, ob der Limes existiert und endlich ist und ob die Konvergenz lokal gleichmäßig erfolgt. Die gleichmäßige Konvergenz des Termes nach dem Pluszeichen folgt, wie in den vorausgegangenen Beweisen, aus $\hat{f}, \hat{g} \in L_1(\mathbb{R})$, kombiniert mit (A.2.9). Mit demselben Argument können wir beim Term vor dem Pluszeichen zu beliebig kleinen Integrationsgrenzen $[-\delta, \delta]$ übergehen.

Wegen $\hat{f}(-t) = J(f) - itK(f) + O(t^2)$ und $\hat{g}(-t) = 1 + O(t^2)$ gilt für $t \neq 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\hat{g}(-t)J(f) - e^{ixt}\hat{f}(-t) + it\,(xJ(f) - K(f))}{1 - s\varphi(t)} \\ &= \frac{J(f)\,(1 - \cos xt) + iJ(f)\,(xt - \sin xt) + itK(f)\left(e^{itx} - 1\right) + O(t^2)}{1 - s\varphi(t)} \\ &= \frac{1 - \cos xt}{t^2} \frac{t^2 J(f)}{1 - s\varphi(t)} + \frac{xt - \sin xt}{t^2} \frac{it^2 J(f)}{1 - s\varphi(t)} + \frac{e^{itx} - 1}{t} \frac{it^2 K(f)}{1 - s\varphi(t)} + \frac{O(t^2)}{1 - s\varphi(t)} \end{aligned}$$

Bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens von $D^s f(x)$ haben wir es also mit Integralen über diese vier Summanden zu tun. Der letzte Summand interessiert uns dabei nicht, denn gemäß Satz A.2.1 gilt

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \frac{O(t^2)}{1 - s\varphi(t)} \mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{O(t^2)}{1 - \varphi(t)} \right| \mathrm{d}t \leq 2C\delta$$

für eine geeignete Konstante $C > 0$. Da wir δ beliebig klein wählen dürfen, brauchen wir dieses Integral bei der Grenzwertbetrachtung also nicht mehr zu berücksichtigen.

Die lokal gleichmäßige Konvergenz der Integrale über die ersten drei Summanden folgt aus Lemma 4.2.3 und Lemma 4.2.4, da diese (nach Multiplikation mit $\mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}$) sämtlich aus einer L_1-Funktionenfolge, die in L_1 konvergiert, und einer stetig fortsetzbaren Funktion $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zusammengesetzt sind. Ein Beispiel für die explizite Durchführung des Beweises findet man im Beweis der Konvergenz von $I_1^s(x)$ in Lemma 4.2.6 vor. $\square$

Bemerkung. Da $D^s f(x)$, wie man bei Betrachtung seiner Definition in Gleichung (4.3.2) und unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $A^s f(x)$ unmittelbar einsieht, stetig ist und in x lokal gleichmäßig gegen $Df(x)$ konvergiert, folgt sogleich die Stetigkeit von $Df(x)$ in x.

Die Untersuchung der Konvergenz von d^s für $s \uparrow 1$ gegen einen endlichen Grenzwert wird uns etwas mehr Mühe bereiten. Definieren wir

$$L_B^s(x) = c^s \left(1 - \Pi_B^s \mathbb{1}_B(x)\right) = c^s \left(1 - \mathbb{E}_x s^{T_B}\right). \tag{4.3.5}$$

Da $c^s = U^s g(0) \geq 0$ aus $g \in \mathfrak{F}^+$ folgt, sieht man unmittelbar, dass $L_B^s(x)$ nichtnegativ ist.

Bemerkung. Mit Hilfe von $L_B^s(x)$ erhalten wir die Identität

$$A^s f(x) - \Pi_B^s A^s f(x) = -G_B^s f(x) + L_B^s(x) J(f) \tag{4.3.6}$$

Beweis. Ersetzen wir den Ausdruck $A^s f(x)$ jeweils durch seine Definition aus 3.1.1, so können wir den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung mittels der Zerlegung in Gleichung (3.3.9) zu

$$\begin{aligned}
&A^s f(x) - \Pi_B^s A^s f(x)\\
&= c^s J(f) - \left(G_B^s f(x) + \Pi_B^s U^s f(x)\right) - \Pi_B^s c^s J(f) \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) + \Pi_B^s U^s f(x)\\
&= c^s J(f)(1 - \mathbb{E}_x s^{T_B}) - G_B^s f(x)\\
&= J(f) L_B^s(x) - G_B^s f(x)
\end{aligned}$$

umformen. $\square$

Die soeben hergeleitete Identität nutzen wir, um aus unserem in Lemma 4.3.1 gewonnenen Wissen über das Konvergenzverhalten von $D^s f(x)$ das folgende Lemma abzuleiten:

4.3.2 Lemma
Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert der Grenzwert des Terms

$$\lim_{s \uparrow 1} \left(L_B^s(x) + d^s \left(x - \mathbb{E}_x \left[s^{T_B} S_{T_B} \right] \right) \right) \tag{4.3.7}$$

und ist endlich. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf Kompakta.

Beweis. Sei $f \in \mathfrak{F}$ beliebig. Wir benutzen Gleichung (4.3.6) für die Umformung

$$\begin{aligned} D^s f(x) - \Pi_B^s D^s f(x) &= A^s f(x) - \Pi_B^s A^s f(x) \\ &\quad + d^s \left(xJ(f) - K(f) \right) - \Pi_B^s d^s \left(xJ(f) - K(f) \right) \\ &= -G_B^s f(x) + L_B^s(x) J(f) \\ &\quad + d^s \left(xJ(f) - K(f) \right) - \Pi_B^s d^s \left(J(f) id_{\mathbb{R}}(x) - K(f) \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) \right) \\ &= -G_B^s f(x) + J(f) \left(L_B^s(x) + x d^s - d^s \mathbb{E}_x \left[s^{T_B} S_{T_B} \right] \right) \\ &\quad + K(f) d^s (\mathbb{E}_x s^{T_B} - 1). \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Am Ende dieser Umformung taucht der Term auf, dessen lokal gleichmäßige Konvergenz wir nachweisen wollen. In Abschnitt 3.3, bzw. sogerade in Lemma 4.3.1, wurde die Existenz und Endlichkeit der Grenzwerte von $\Pi_B^s f(x)$ und $G_B^s f(x)$, bzw. $D^s f(x)$ für $s \uparrow 1$ und alle $x \in \mathbb{R}$ festgestellt und nachgewiesen, dass die Konvergenz jeweils gleichmäßig auf Kompakta ist. Da aus der Stetigkeit von $D^s f(x)$ mittels Satz 3.3.4 und der darauf folgenden Bemerkung offenbar auch die lokal gleichmäßige Konvergenz von $\Pi_B^s D^s f(x)$ folgt, können wir schließen, dass der Grenzwert des Termes

$$J(f) \left(L_B^s(x) + x d^s - d^s \mathbb{E}_x \left[s^{T_B} S_{T_B} \right] \right) + K(f) d^s (\mathbb{E}_x s^{T_B} - 1),$$

für alle $f \in \mathfrak{F}$ existiert und endlich ist und dass die Konvergenz gleichmäßig auf Kompakta ist. Wählen wir f mit $J(f) > 0$ und $K(f) = 0$ verschwindet der letzte Summand und die Behauptung ist bewiesen. □

Aus diesem Lemma folgern wir

4.3.3 Lemma

Es gilt

$$\limsup_{s\uparrow 1} |d^s| < \infty.$$

Beweis. Da $\overline{B}$ nach Voraussetzung kompakt und B insbesondere beschränkt ist, ist $\left|\mathbb{E}_x\left[s^{T_B} S_{T_B}\right]\right|$ gleichmäßig für alle $0 \leq s \leq 1$ und $x \in \mathbb{R}$ durch die endliche Konstante $M := \sup\{|z| : z \in B\}$ beschränkt. Gehen wir nun von der Gegenannahme $\limsup |d^s| = \pm\infty$ für $s \uparrow 1$ aus. Da $L_B^s(x)$ für alle $s \in (0,1)$ nichtnegativ ist (☞ Definition in (4.3.5)), erhalten wir einen Widerspruch zu Lemma 4.3.2, indem wir $x > M$, bzw. $x < -M$ wählen. □

Nach dem Satz von Bolzano Weierstraß können wir eine Teilfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \uparrow 1$ für $n \to \infty$ wählen, für die der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d^{s_n} =: d \tag{4.3.9}$$

existiert und endlich ist. Zwar besteht möglicherweise eine Abhängigkeit von der speziellen Wahl der Teilfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zumindest erhalten wir aber bereits wie versprochen als Folgerung:

4.3.4 Lemma

Für $f \in \mathfrak{F}$, $x \in \mathbb{R}$ und eine durch (4.3.9) *festgelegte Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert der Grenzwert*

$$A(x) := \lim_{n\to\infty} A^{s_n} f(x) \tag{4.3.10}$$

und ist endlich. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.

4.3.5 Korollar

Aus der Stetigkeit von $A^{s_n} f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der lokal gleichmäßigen Konvergenz für $n \to \infty$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} A^{s_n} f(x)$ stetig in x ist.

Ebenso erhalten wir durch Kombination der Lemmata 4.3.2 und 4.3.3 für die Teilfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ auch die lokal gleichmäßige Konvergenz von $L_B^{s_n}(x)$ gegen einen endlichen (nichtnegativen) Grenzwert, den wir $L_B(x)$ nennen.

Bemerkung. In der Identität (4.3.6) können wir, bei Wahl der Teilfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, den Grenzübergang $n \to \infty$ vollziehen: In (3.3.5) und (3.3.6) hatten wir die schwache Konvergenz von $(\Pi_B^s(x,\cdot))_{s\in(0,1)}$, bzw. die vage Konvergenz von $(G_B^s(x,\cdot))_{s\in(0,1)}$ für $s\uparrow 1$ nachgewiesen. Zusammen mit den soeben nachgewiesenen Tatsachen über das Grenzverhalten von $A^{s_n}f(x)$ und $L_B^{s_n}(x)$ erhalten wir, dass wir in (4.3.6) den Grenzübergang vollziehen können und die Identität

$$Af(x) - \Pi_B Af(x) = -G_B f(x) + L_B(x)J(f). \tag{4.3.11}$$

erhalten.

In Lemma 4.3.4 haben wir den ersten Teil von Satz 3.1.4 nachgewiesen, ohne dabei zusätzlich wie in Lemma 4.2.8 $\sigma^2 < \infty$ vorauszusetzen! Allerdings bleibt zunächst als Wermutstropfen die Abhängigkeit von der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehen, die wir erst zum Schluss des Kapitels auflösen werden. Zuvor werden wir aber den Beweis der Sätze 3.1.3 und Satz 3.1.4 unter diesem Vorbehalt abschließen.

4.4. Beweis des Rekurrenzsatzes unter einem Vorbehalt

Nun beweisen wir Satz 3.1.3 und damit insbesondere den Rekurrenzsatz. Dabei gelten alle Aussagen wie angekündigt unter dem folgenden Vorbehalt:

> Wann auch immer vom Grenzübergang $A^s f(x)$ für $s \uparrow 1$ die Rede ist, wird dabei die Wahl einer speziellen Teilfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Abschnitt 4.3 vorausgesetzt. Für diese Folge gilt Lemma 4.3.4, also die lokal gleichmäßige Konvergenz von $A^{s_n} f(x)$ für $n \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert $Af(x)$. Sprechen wir von $Af(x)$, so ist stets dieser Grenzwert gemeint.

Wir untersuchen zunächst, wie sich die Zuwächse von $Af(x)$ verhalten, wenn man den Startwert x verschiebt, wobei wir Af als Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auffassen. Das langfristige Ziel ist der Beweis des zweiten Teil von Satz 3.1.4, also der Aussage über das asymptotische Steigungsverhalten von Af. Den Beweis von Satz 3.1.3 erhalten wir zum Ende dieses Abschnitts auf dem Weg dorthin.

4.4.1 Lemma
Sei $f \in \mathfrak{F}$ und K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann existiert eine endliche Konstante M, so dass

$$|Af(y+x) - Af(y)| \leq M \tag{4.4.1}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und $x \in K$.

Für den Beweis benötigen wir die folgende Identität, für die wir $U^s f(x)$ derart zerlegen, dass wir eine Eintrittskomponente in den kompakten Träger von f, sowie eine Komponente, die beim Eintrittspunkt startet, erhalten:

4.4.2 Lemma
Ist $C \subset \mathbb{R}$ kompakt mit nichtleerem Inneren und ist $f \in \mathfrak{F}$ mit einem in C enthaltenen Träger, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq s < 1$

$$U^s f(x) = \mathbb{E}_x \left[s^{T_C} \big(f(S_{T_C}) + U^s f(S_{T_C}) \big) \right], \tag{4.4.2}$$

wobei $T_C := \inf\{n \geq 0 : S_n \in C\}$ die Ersteintrittszeit in C sei.

Beweis. Es gilt mit $\mathfrak{F}_n := \sigma(S_0, ..., S_n)$

$$U^s f(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n\geq 1} s^n f(S_n) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x \left[\sum_{n \geq T_C} s^n f(S_n) \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[s^{T_C} f(S_{T_C}) + \sum_{n \geq 1} s^{T_C+n} f(S_{T_C+n}) \right]
\end{aligned}
$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \left[\sum_{n \geq 1} s^{T_C+n} f(S_{T_C+n}) \right] \\
&= \sum_{k \geq 1} \int_{\{T_C = k\}} \mathbb{E} \left(\sum_{n \geq 1} s^{T_C+n} f(S_{T_C+n}) \mid \mathfrak{F}_{T_C} \right) d\mathbb{P}_x \\
&= \sum_{k \geq 1} \int_{\{T_C = k\}} s^k \, \mathbb{E}_{S_{T_C}} \left(\sum_{n \geq 1} s^n f(S_n) \right) d\mathbb{P}_x \\
&= \mathbb{E}_x \left[s^{T_C} \mathbb{E}_{S_{T_C}} \left[\sum_{n \geq 1} s^n f(S_n) \right] \right],
\end{aligned}
$$

wobei in der dritten Zeile die starke Markov-Eigenschaft genutzt wurde. □

Beweis von Lemma 4.4.1. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$
A^s f(y) - A^s f(y+x) = U^s f(y+x) - U^s f(y) = U^s f_{-x}(y) - U^s f(y) \tag{4.4.3}
$$

Sei C eine weitere nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, die außerdem sowohl den Träger von f, als auch für jedes $x \in K$ den Träger von f_{-x} enthalte, d.h. es gelte $f(y) = 0$ für alle $y \notin C$, sowie $f_{-x}(y) = f(y+x) = 0$ für alle $x \in K$ und $y \notin C$. Nun erfüllt C die Voraussetzungen der Identität (4.4.2) sowohl für den Ausdruck $U^s f(y)$, als auch für alle $U^s f(y+x)$ $(x \in K)$. Wir können also für beliebige $x \in K$ den Term aus Gleichung (4.4.3) weiter umformen:

$$
\begin{aligned}
&U^s f_{-x}(y) - U^s f(y) \\
&= \mathbb{E}_y \left[s^{T_C} \left(f_{-x}(S_{T_C}) - f(S_{T_C}) \right) \right] + \mathbb{E}_y \left[s^{T_C} \left(U^s f_{-x}(S_{T_C}) - U^s f(S_{T_C}) \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_y \left[s^{T_C} \left(f(x + S_{T_C}) - f(S_{T_C}) \right) \right] + \mathbb{E}_y \left[s^{T_C} \left(A^s f(S_{T_C}) - A^s f(x + S_{T_C}) \right) \right]
\end{aligned}
$$

Wir nutzen also in der zweiten Zeile die Tatsache aus, dass f einen kompakten Träger C besitzt, und verlagern die Startpunkte y, bzw. $y+x$ für $U^s f$ in Gleichung (4.4.1) in die Menge C.

Nun können wir leicht die gleichmäßige Beschränktheit des Ausdrucks folgern: Sowohl $\mathbb{E}_y\left[A^s f(S_{T_C})\right]$ als auch $\mathbb{E}_y\left[A^s f(x+S_{T_C})\right]$ sind für $0<s<1$, $x\in K$ und $y\in\mathbb{R}$ betragsmäßig durch $\sup\{|A^s f(z)| : z\in K+C\}$ beschränkt. Da $A^s f$ lokal gleichmäßig gegen die (stetige) Grenzfunktion Af konvergiert sind die Grenzwerte beider Terme für $s\uparrow 1$ beschränkt. Folglich konvergiert die Differenz

$$\mathbb{E}_y\left[A^s f(S_{T_C}) - A^s f(x+S_{T_C})\right]$$

gleichmäßig für alle $x\in K$ und $y\in\mathbb{R}$ und der Grenzwert ist beschränkt. Dass selbiges auch für den ersten Term aus Gleichung (4.4.1), nämlich für

$$\mathbb{E}_y\left[s^{T_C}\left(f(x+S_{T_C}) - f(S_{T_C})\right)\right]$$

gilt, ist klar, da f beschränkt ist. Dies schließt den Beweis von Lemma 4.4.1 ab. □

Mit Hilfe des Maßes $\Pi_B(x,\cdot)$, das wir im folgenden Lemma als Funktional verwenden, formulieren wir die Aussage aus Lemma 4.4.1 über die Beschränktheit Steigungen von Af geringfügig um. In der Rolle des Kompaktums K tritt nun $\overline{B}$ auf:

4.4.3 Lemma
Sei $f\in\mathfrak{F}$. Dann ist

$$\Pi_B Af_y(x) - Af_y(0)$$

gleichmäßig beschränkt für alle $x,y\in\mathbb{R}$

Beweis. In ausgeschriebener Form gilt

$$\begin{aligned}\Pi_B Af_y(x) - Af_y(0) &= \int \left(Af_y(z) - Af_y(0)\right)\Pi_B(x,dz)\\ &= \mathbb{E}_x\left[Af(S_{T_B}-y) - Af_y(0)\right].\end{aligned}$$

Da $\overline{B}$ nach Generalvoraussetzung kompakt ist und $\Pi_B(x,\overline{B}^c)\equiv 0$ ist, sind mit $K=\overline{B}$ die Voraussetzungen von Lemma 4.4.1 erfüllt und wir erhalten die gleichmäßige Beschränktheit des Ausdrucks in x und y. □

Das folgende Lemma sagt uns, dass für Funktionen $f \in \mathfrak{F}^+$ und eine Konstante M $Af(x+y) \leq M + Af(x) + Af(y)$ und somit eine gewisse Subadditivitätseigenschaft gilt. Zuvor notieren wir, dass für alle $y \in \mathbb{R}$

$$J(f_y) = J(f), \text{ sowie } K(f_y) = K(f) + yJ(f) \tag{4.4.4}$$

gilt wobei man für letztere Umformung in der Definition von K (s. Gleichung (3.1.2)) x durch $x + y$ substituiere.

4.4.4 Lemma

Sei $f \in \mathfrak{F}^+$. Dann ist $Af(x+y) - Af(x) - Af(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gleichmäßig von oben beschränkt.

Beweis. Da $J(f) = J(f_y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, folgt mit (4.3.11) für $f \in \mathfrak{F}$ und $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Af(x+y) - Af(x) - Af(y) &= Af_{-y}(x) - Af(x) - Af_{-y}(0) \\ &= -G_B f_{-y}(x) + L_B(x)J(f_{-y}) + \Pi_B Af_{-y}(x) \\ &\quad - (-G_B f(x) + L_B(x)J(f) + \Pi_B Af(x)) \\ &\quad -Af_{-y}(0) \\ &= (\Pi_B Af_{-y}(x) - Af_{-y}(0)) \\ &\quad -\Pi_B Af(x) - G_B f_{-y}(x) + G_B f(x) \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Lemma 4.4.3 besagte, dass der Term $(\Pi_B Af_{-y}(x) - Af_{-y}(0))$ in x und y gleichmäßig beschränkt ist. Da B relativ kompakt ist und Af auf kompakten Mengen beschränkt ist (s. Lemma 4.3.4 und 4.4.1), ist weiterhin $\Pi_B Af(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ beschränkt. Schließlich ist auch der Term $G_B f(x)$ nach Satz 3.3.3 gleichmäßig beschränkt. Zu guter Letzt stellen wir fest, dass auch $-G_B f_{-y}(x)$ in x und y gleichmäßig von oben beschränkt ist, da $G_B f_{-y}(x) \geq 0$ für alle $f \in \mathfrak{F}^+$ gilt. □

Im folgenden Lemma betrachten wir den Ausdruck $G_B f_y(y)$ für große y. Wir wiederholen kurz die Anschauung aus Abschnitt 4.1: Stellen wir uns der Einfachheit halber vor, dass $f = \mathbb{1}_K$, wobei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt sei, so bezeichnet $G_B f_y(y)$ die erwartete Anzahl der Eintritte des RWs in $K + y$ vor dem ersten Treffer in B, wenn man in y startet. Das folgende Lemma sagt und, dass $G_B f_y(y)$ für $|y| \to \infty$ unendlich groß wird.

4.4.5 Lemma
Für $f \in \mathfrak{F}^+$ mit $J(f) > 0$, gilt

$$\lim_{|y|\to\infty} G_B f_y(y) = \infty \tag{4.4.6}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} G_B f_y(y) &= \mathbb{E}_y\left[\sum_{n=1}^{T_B} f_y(S_n)\right] \\ &= \mathbb{E}_y\left[\sum_{n=1}^{T_B} f(S_n - y)\right] = \mathbb{E}_0\left[\sum_{n=1}^{T_{B-y}} f(S_n)\right] \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Nun gilt

$$\lim_{|y|\to\infty} T_{B-y} = \infty \tag{4.4.8}$$

$\mathbb{P}$-f.s. und aufgrund der Rekurrenz gilt für Funktionen $f \in \mathfrak{F}^+$ mit $J(f) > 0$ (bzw. $f \neq 0$), dass weiter

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) = \infty \tag{4.4.9}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1, woraus die Behauptung folgt. □

Nun folgt das Hauptresultat dieses Abschnitts, der Beweis von Satz 3.1.3, der unter dem zu Beginn des Abschnitts genannten Vorbehalt erfolgt:

Beweis von Satz 3.1.3. Sei $f \in \mathfrak{F}^+$ beliebig mit $J(f) > 0$ und $Af(x) = \lim_{n\to\infty} A^{s_n} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der in diesem Abschnitt fest gewählten, gegen 1 konvergenten Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze $x := -y$ in Lemma 4.4.4. Dann ist also $Af(0) - (Af(y) + Af(-y))$ gleichmäßig von oben beschränkt. Betrachte nun die Gleichung (4.4.5). Der einzige nicht beschränkte Ausdruck auf der rechten Seite ist $G_B f_{-y}(-y)$, so dass $(Af(y) + Af(-y))$ gemäß dem vorangegangenen Lemma uneigentlich gegen ∞ konvergiert. □

4.5. Beweis des zweiten Hauptsatzes

In diesem Abschnitt beweisen wir Satz 3.1.4 und damit den zweiten Hauptsatz. Dazu sind noch zwei Dinge zu tun: Erstens beweisen wir die Aussage (3.1.7) über das Grenzwertverhalten der Steigungen $Af(x+y) - Af(y)$ und zweitens weisen wir nach, dass der Grenzwert $s \uparrow 1$ des diskontierten Potentialkerns unabhängig von der Wahl der Folge ist.

Zunächst gehen wir aber wie im vorhergegangenen Abschnitt bei Grenzwertbetrachtungen $s \uparrow 1$ von einer speziellen Teilfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus, die für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert und für die der diskontierte Potentialkern gemäß Abschnitt 4.3 lokal gleichmäßig konvergiert. Dementsprechend bezeichne für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ weiter $Af(x)$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} A^{s_n} f(x)$.

Beweis von Satz 3.1.4.
Wir werden die Fälle $\sigma^2 < \infty$ und $\sigma^2 = \infty$ unterscheiden. Im Fall unendlicher Varianz beschränken wir uns auf Funktionen aus $\mathfrak{F}^+$ und profitieren von folgender Beschränkungseigenschaft:

4.5.1 Lemma
Für alle $f \in \mathfrak{F}^+$ ist $Af(x)$ nach unten beschränkt.

Beweis. Sei K eine kompakte Menge mit nichtleerem Inneren, die den Träger von f enthalte. Nach Lemma 4.3.4 konvergiert der stetige Ausdruck $A^{s_n} f(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf kompakten Mengen. Somit existiert eine Konstante $M > 0$, für die

$$-M \le A^{s_n} f(x) - A^{s_n} f(0) = U^{s_n} f(0) - U^{s_n} f(x)$$

für alle $n \ge 1$ und $x \in K$. Sei außerdem o.B.d.A. $M \ge \|f\|_\infty$. Für beliebige Startpunkte $x \in \mathbb{R}$ ersetzen wir $U^{s_n} f(x)$ mit Hilfe der Identität aus Lemma 4.4.2 und legen beim Ersteintritt in K einen Zwischenstopp ein. Dadurch erreichen wir ein weiteres Mal, dass den Startwert von Uf in eine kompakten Menge K verlagern, weshalb wir die Schranke M ins Spiel bringen können. Es gilt

$$\begin{aligned} U^{s_n} f(0) - U^{s_n} f(x) &= U^{s_n} f(0) - \mathbb{E}_x \left[s_n^{T_K} U^{s_n} f(S_{T_K}) \right] - \mathbb{E}_x \left[s_n^{T_K} f(S_{T_K}) \right] \\ &\ge \mathbb{E}_x \left[s_n^{T_K} \left(U^{s_n} f(0) - U^{s_n} f(S_{T_K}) \right) \right] - M \ge -2M \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei wir für beide Ungleichungen jeweils eine der beiden oben genannten

Beschränkungeigenschaften von M genutzt haben. Für den Grenzwert $n \to \infty$ gilt also

$$Af(x) - Af(0) \geq -2M$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wodurch das Lemma bewiesen ist. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas weiten wir den zweiten Teil der Aussage aus Lemma 4.2.8 über das Grenzwertverhalten der mittleren Steigungen $Af(y)/y$ für Funktionen $f \in \mathfrak{F}^+$ auf den Fall $\sigma^2 = \infty$ aus.

4.5.2 Lemma
Sei $\sigma^2 = \infty$ und $f \in \mathfrak{F}^+$. Dann folgt

$$\lim_{|y|\to\infty} y^{-1} Af(y) = 0. \tag{4.5.1}$$

Beweis. Nach Lemma 4.3.4 existiert

$$Af(y) + Af(-y) = \lim_{n\to\infty} \left(A^{s_n} f(y) + A^{s_n} f(-y)\right) \tag{4.5.2}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und ist endlich. Gemäß Lemma 4.2.1 gilt

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1} \left(Af(y) + Af(-y)\right) = 0. \tag{4.5.3}$$

In Lemma 4.5.1 erhielten wir außerdem soeben, dass $Af(y)$ für $f \in \mathfrak{F}^+$ nach unten gleichmäßig in y beschränkt ist, womit

$$\lim_{|y|\to\infty} y^{-1} Af(y) = 0 \tag{4.5.4}$$

aus $\liminf_{|y|\to\infty} Af(y)/y \geq 0$ folgt. $\square$

Nun wollen wir Aussage (3.1.7) aus Satz 3.1.4, also das Grenzverhalten der Zuwächse

$$\Delta_x(y) := Af(y) - Af(y-x). \tag{4.5.5}$$

für $y \to \pm\infty$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ untersuchen. Wir wissen mit Lemma 4.2.8 und dem gerade notierten Lemma 4.5.2 bereits, wie sich das Verhälltnis $Af(y)/y$ asymptotisch entwickelt. Hieraus kann man mittels

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\pm\infty}(Af(x+y)-Af(y)) &= \lim_{y\to\pm\infty}(x+y)\frac{Af(x+y)}{x+y}-y\frac{Af(y)}{y}\\ &= \pm x\lim_{y\to\infty}\frac{Af(y)}{y}\end{aligned}$$

scheinbar sofort (3.1.7) folgern. Natürlich ist der letzte Schritt so aber nicht zulässig: Auch wenn $Af(x+y)/(x+y)-Af(y)/y<\varepsilon$ für ein $\varepsilon>0$ gilt, wird nach Multiplikation mit y die Fehlerschranke ε wieder vergrößert. Weiß man allerdings, dass $\lim_{y\to\pm\infty}Af(x+y)-Af(x)$ existiert und endlich ist, so folgert man leicht die Übereinstimmung mit $x\lim_{y\to\pm\infty}Af(y)/y$ (☞ Korollar 4.5.8).

Im Falle unendlicher Varianz bereitet die Untersuchung der Zuwächse von Af einigen Aufwand. Zunächst untersuchen wir das asymptotische Verhalten von Differenzen der Form $\Delta_x(y+x)-\Delta_x(y)$, also die Differenzen $\big(Af(x+y)-Af(y)\big)-\big(Af(y)-Af(y-x)\big)$ aus Zuwächsen von Af. Durch Bildung einer Teleskopsumme lässt sich mit diesen die Asymptotik der Zuwächse und damit das mittlere Steigungsverhalten von Af studieren, was wir aber erst im Beweis von Lemma 4.5.4 tun werden.

Zuvor notieren wir das folgende Lemma, in dessen fourieranalytischen Nachweis wir keine Annahmen über die Varianz von Q und die Funktionen $f\in\mathfrak{F}$ treffen müssen:

4.5.3 Lemma
Sei $f\in\mathfrak{F}$.

a) Für $x,y\in\mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\Delta_x(y+2x)-\Delta_x(y+x)=\lim_{s\uparrow 1}(A^sf(y+2x)-2A^sf(y+x)+A^sf(y)) \tag{4.5.6}$$

und ist endlich. Die Konvergenz ist für $(x,y)\in K\times\mathbb{R}$ gleichmäßig, wobei $K\subset\mathbb{R}$ eine beliebige kompakte Menge sei.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}&\lim_{|y|\to\infty}|\Delta_x(y+2x)-\Delta_x(y+x)| \qquad (4.5.7)\\ &=\lim_{|y|\to\infty}\lim_{s\uparrow 1}(A^sf(y+2x)-2A^sf(y+x)+A^sf(y))=0,\end{aligned}$$

bzw. $\lim_{|y|\to\infty}|\Delta_x(y+x)-\Delta_x(y)|$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und die Konvergenz ist in x gleichmäßig auf kompakten Mengen.

Beweis. (a) Zunächst rechnen wir mit Hilfe von (3.2.3)

$$
\begin{aligned}
&A^s f(y+2x) - 2A^s f(y+x) + A^s f(y) \\
&= (A^s f(y+2x) - A^s f(y+x)) - (A^s f(y+x) - A^s f(y)) \\
&= \quad \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(y+x)t}(1-e^{ixt})\hat{f}(-t)}{1-s\varphi(t)} \varphi(t) dt \\
&\quad - \quad \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iyt}(1-e^{ixt})\hat{f}(-t)}{1-s\varphi(t)} \varphi(t) dt \\
&= -\frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iyt}(1-e^{ixt})^2 \hat{f}(-t)}{1-s\varphi(t)} \varphi(t) dt.
\end{aligned}
$$

Vermöge der Umformung

$$
\begin{aligned}
& (e^{ixt})^2 + 1 = 2e^{ixt} \left(\frac{e^{ixt} + e^{-ixt}}{2} \right) = 2e^{ixt} \cos xt \\
\Leftrightarrow \quad & \left(1 - e^{ixt}\right)^2 = (e^{ixt})^2 + 1 - 2e^{ixt} = 2e^{ixt} \left(\cos xt - 1\right)
\end{aligned}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&A^s f(y+2x) - 2A^s f(y+x) + A^s f(y) \\
&= \frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iyt} e^{ixt} (1-\cos xt) \hat{f}(-t) \varphi(t)}{1-s\varphi(t)} dt. \qquad (4.5.8)
\end{aligned}
$$

Untersuchen wir zuerst für $x, y \in \mathbb{R}$ das Grenzwertverhalten des Ausdrucks für $s \uparrow 1$. Mit der gewohnten Argumentation können wir dabei o.B.d.A. von Integrationsgrenzen $[-\delta, \delta]$ für ein beliebig kleines $\delta > 0$ übergehen.

Der Betrag des Integranden in Gleichung (4.5.8) wird durch den 0 stetig fortsetzbaren Ausdruck $C\,|1-\cos xt|\,/t^2$ majorisiert (hierbei ist $C > 0$, s. einmal mehr Satz A.2.1). Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt hieraus, dass das Integral für $s \uparrow 1$ gegen

$$
\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iyt} e^{ixt} (1-\cos xt) \hat{f}(-t) \varphi(t)}{1-\varphi(t)} dt. \qquad (4.5.9)
$$

konvergiert und dass letzteres Integral existiert und endlich ist.

Die lokale Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt nach Unterteilung der Integrationsgrenzen für das Integral über $[-\delta, \delta]$ aus Lemma 4.2.3 und für das Integral über $[-\delta, \delta]^c$ analog zu Proposition 4.2.5.

(b) Dass der Ausdruck in Gleichung (4.5.7) für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|y| \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folgt aus dem Riemann-Lebesgue-Lemma, was man leicht nachvollzieht, wenn man den Integrand in der Gestalt

$$\frac{e^{iyt}e^{ixt}(1-\cos xt)\hat{f}(-t)\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = e^{iyt}\,\frac{e^{ixt}(1-\cos xt)\hat{f}(-t)\varphi(t)}{1-\varphi(t)} \tag{4.5.10}$$

schreibt, denn der auf der rechten Seite befindliche Bruch ist für feste $x \in \mathbb{R}$ in $t = 0$ stetig fortsetzbar und aufgrund der absoluten Integrierbarkeit von $\hat{f}$ und der strengen Nichtarithmetizität von Q λ-integrierbar.

Bei der Untersuchung der lokal gleichmäßigen Konvergenz in x können wir, da wir in Teil (a) die lokal gleichmäßige Konvergenz für $s \uparrow 1$ nachgewiesen haben, davon ausgehen, dass der Grenzübergang $s \uparrow 1$ bereits vollzogen wurde. Sei $\varepsilon > 0$ und ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ gegeben. Wir zerlegen den Integrationsbereich der Integrals in Gleichung (4.5.9) und wählen ein $a > 0$ derart, dass

$$\left| \int\limits_{\{|t|>a\}} \frac{e^{iyt}e^{ixt}(1-\cos xt)\hat{f}(-t)\varphi(t)}{1-\varphi(t)}dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.11}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Betrachten wir nun das Integral über $[-a, a]$ und seine Variation in x. Sei $x \in K$ und ein $y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass für alle $y > y_0$

$$\left| \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^{iyt}e^{ixt}\big(1-\cos(xt)\big)\hat{f}(-t)\varphi(t)}{1-\varphi(t)}dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Für alle $y \in \mathbb{R}$ und $\tilde{x} \in K$ gilt

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^{iyt}e^{i\tilde{x}t}\big(1-\cos(\tilde{x}t)\big)\hat{f}(-t)\varphi(t)}{1-\varphi(t)}dt \right| \\ &\leq \left| \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^{iyt}\hat{f}(-t)\varphi(t)t^2}{1-\varphi(t)} \left(\frac{e^{i\tilde{x}t}\big(1-\cos(\tilde{x}t)\big)}{t^2} - \frac{e^{ixt}\big(1-\cos(xt)\big)}{t^2} \right) dt \right| + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

$$\leq \int_{-a}^{a} \left| \frac{\hat{f}(-t)t^2}{1-\varphi(t)} \right| \left| \frac{e^{i\tilde{x}t}\big(1-\cos(\tilde{x}t)\big)}{t^2} - \frac{e^{ixt}\big(1-\cos(xt)\big)}{t^2} \right| dt + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Der Ausdruck $|\hat{f}(-t)t^2/\big(1-\varphi(t)\big)|$ ist (nach stetiger Fortsetzung in 0) für $t \in [-a,a]$ durch eine Konstante $M > 0$ beschränkt. Da $e^{ixt}\big(1-\cos(xt)\big)/t^2$ – nach stetiger Fortsetzung in $(x,0) \in K \times \{0\}$ durch $x^2/2$ – für $(x,t) \in K \times [-a,a]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $(x,t) \in K \times [-a,a]$ und alle $(\tilde{x},\tilde{t}) \in B_\delta(x) \times B_\delta(t)$

$$\left| \frac{e^{i\tilde{x}\tilde{t}}\big(1-\cos(\tilde{x}\tilde{t})\big)}{\tilde{t}^2} - \frac{e^{ixt}\,(1-\cos(xt))}{t^2} \right| < \frac{\varepsilon}{4(M\cdot 2a)}$$

und damit insbesondere

$$\left| \frac{e^{i\tilde{x}t}\,(1-\cos(\tilde{x}t))}{t^2} - \frac{e^{ixt}\,(1-\cos(xt))}{t^2} \right| < \frac{\varepsilon}{4(M\cdot 2a)}$$

für alle $\tilde{x} \in B_\delta(x)$ gilt. Nach Ungleichung (4.5.12) folgt hieraus

$$\left| \int_{-a}^{a} \frac{e^{iyt}e^{i\tilde{x}t}(1-\cos\tilde{x}t)\hat{f}(-t)\varphi(t)}{1-\varphi(t)} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.13}$$

für alle $y > y_0$. Wähle nun eine Überdeckung $\bigcup_{k=1}^{n} B_\delta(x_k)$ von K und $y_1,...,y_n \in \mathbb{R}$, so dass für alle $1 \leq i \leq n$, $\tilde{x} \in B_\delta(x_i)$ und $y > y_i$ die Ungleichung (4.5.13) gilt. Dann gilt die Ungleichung für alle $y > \max\{y_i : 1 \leq i \leq n\}$ und alle $x \in K$. In Kombination mit (4.5.11) ist somit die lokal gleichmäßige Konvergenz bewiesen. □

Nun können wir für $f \in \mathfrak{F}^+$ den zweiten Teil von Satz 3.1.4 folgern und beweisen als erstes, dass wir die Steigungen von Af für genügend großes y in der angesprochenen Weise mit dem Verhältnis $Af(y)/y$ identifizieren können:

4.5.4 Lemma

Sei $f \in \mathfrak{F}^+$ und $x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} (Af(x+y) - Af(y)) = x \lim_{y\to\pm\infty} \frac{Af(y)}{y} \tag{4.5.14}$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}$ mit $0 \notin K$.

Beweis. Sei $m_\pm := \lim_{y\to\pm\infty} Af(y)/y$, $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $\varepsilon > 0$ beliebig. O.B.d.A. sei der Trivialfall $x = 0$ ausgeschlossen. In Lemma 4.4.4 hatten wir gezeigt, dass

$$Af(x+y) - Af(x) - Af(y) \leq C \tag{4.5.15}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und eine Konstante $C > 0$. Setzen wir nx für x ein, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig sei, so erhalten wir weiter

$$Af(nx+y) - Af(nx) - Af(y) \leq C$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Schreibe den Term $Af(nx+y) - Af(y)$ auf der linken Seite der Ungleichung nun mittels (4.5.5) als Teleskopsumme:

$$\big(\Delta_x(y+x) + ... + \Delta_x(y+nx)\big) - Af(nx) \leq C$$

Die Teleskopsumme formen wir weiter um zu

$$\begin{aligned}
& \Delta_x(y+nx) - \Delta_x(y+(n-1)x) \\
+ \quad & 2\left[\Delta_x(y+(n-1)x) - \Delta_x(y+(n-2)x)\right] \\
+ \quad & ... \\
+ \quad & (n-1)\left[\Delta_x(y+2x) - \Delta_x(y+x)\right] \\
+ \quad & n\Delta_x(y+x)
\end{aligned}$$

Aus (4.5.7) folgt, dass die Ausdrücke - mit Ausnahme des Terms in der letzten Zeile - zeilenweise für $|y| \to \infty$ verschwinden und dass die Konvergenz lokal gleichmäßig ist. Um dies einzusehen schreibe man den Term in der ersten Zeile als $\Delta_x(y+(n-2)x+2x) - \Delta_x(y+(n-2)x+x)$ und verfahre in den anderen Zeilen entsprechend Abhängig von K und n existiert also ein y_0, so dass für alle $x \in K$ und $|y| > y_0$

$$n\Delta_x(y+x) - Af(nx) \leq \tilde{C}, \tag{4.5.16}$$

mit $\tilde{C} = C + \gamma$ ($\gamma > 0$ beliebig), bzw.

$$\limsup_{|y|\to\infty} n\Delta_x(y+x) - Af(nx) \leq C \tag{4.5.17}$$

gilt. Schreibe diese Ungleichung in der Form

$$\limsup_{|y|\to\infty} \Delta_x(y+x) - x\frac{Af(nx)}{nx} \leq \frac{C}{n}. \tag{4.5.18}$$

Wählen wir $n \in \mathbb{N}$ genügend groß, so dass $C/n < \varepsilon/2$, und $|Af(nx)/nx - m_+| < \varepsilon/2$ $(x > 0)$, bzw.$|Af(nx)/nx - m_-| < \varepsilon/2$ $(x < 0)$, folgt weiter

$$\limsup_{y\to\pm\infty} \Delta_x(y+x) - xm_\pm \leq \varepsilon. \tag{4.5.19}$$

Falls $0 \notin K$ erhalten wir auch die lokale Gleichmäßigkeit der Konvergenz: Wähle dann n so groß, dass einerseits $C/n < \varepsilon/2$ und andererseits $|nx| > y_1$ für alle $x \in K$, wobei $y_1 > 0$ derart sei, dass $|Af(y)/y - m_+| < \varepsilon/2M$ für alle $y > y_1$, bzw. $|Af(y)/y - m_-| < \varepsilon/2M$ für alle $y < -y_1$ mit $M := \max_{x\in K} |x|$ gelte. Dann gilt also

$$\limsup_{|y|\to\infty} \Delta_x(y+x) - xm_\pm \leq \frac{C}{n} + |x|\left|m_\pm - \frac{Af(nx)}{nx}\right| < \varepsilon \tag{4.5.20}$$

für alle $x \in K$. Per Definition von $\Delta_x(y+x)$ in (4.5.5) folgt aus (4.5.19)

$$\limsup_{y\to\pm\infty} (Af(y+x) - Af(y)) \leq xm_\pm \tag{4.5.21}$$

und dass diese Schranke für den Limes Superior gleichmäßig für $x \in K$ unterschritten wird, falls $0 \notin K$. Indem man in (4.5.21) $-x$ statt x einsetzt, erhält man außerdem

$$\limsup_{y\to\pm\infty} (Af(y-x) - Af(y)) = \limsup_{y\to\pm\infty} (Af(y) - Af(y+x)) \leq -xm_\pm,$$

und somit

$$\liminf_{y\to\pm\infty} (Af(y+x) - Af(y)) \geq xm_\pm,$$

wobei die Schranke ebenfalls gleichmäßig für $x \in K$ $(0 \neq K)$ ist (bei obigem Beweis gehe man von K zum Kompaktum $-K$ über). Beide Ungleichungen zusammen implizieren (4.5.14) und damit die Behauptung. □

Hieraus und aus Lemma 4.4.4 folgt sofort die Behauptung aus Satz 3.1.4 im Falle unendlicher Varianz:

4.5.5 Korollar
Sei $\sigma^2 = \infty$ und $f \in \mathfrak{F}^+$, so gilt

$$\lim_{|y| \to \infty} (Af(x+y) - Af(y)) = 0 \tag{4.5.22}$$

und die Konvergenz ist auf kompakten Mengen gleichmäßig.

Beweis. Nach dem vorangegangenen Satz und Lemma 4.5.2 bleibt nur noch zu zeigen, dass die Konvergenz auf beliebigen kompakten Mengen gleichmäßig erfolgt. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Hierfür genügt es zu zeigen, dass der Ausdruck $Af(nx)/n$ aus Ungleichung (4.5.18) für $x \in K$ und $n \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Der Rest des Beweises verläuft wie beim Beweis von Lemma 4.5.4.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $y_0 > 0$ derart, dass $Af(y)/y < \varepsilon$ für alle $|y| > y_0$ und definiere $m := \max_{y \in [0,y_0]} |Af(y)|$, sowie $M := \max_{x \in K} |x|$. Wähle dann $N \in \mathbb{N}$, so dass $(m \vee M)/N < \varepsilon$. Dann gilt

$$\frac{Af(nx)}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und $x \in K$ □

Nun werden wir die Aussage aus Lemma 4.5.4 im Falle endlicher Varianz verallgemeinern, indem wir auch für diesen Fall die lokale Gleichmäßigkeit der Konvergenz nachweisen. Außerdem zeigen wir, dass die Konvergenzaussage auch für beliebige $f \in \mathfrak{F}$ gilt.

4.5.6 Lemma
Sei $\sigma^2 < \infty$ und $f \in \mathfrak{F}$. Dann existiert

$$\lim_{y \to \pm\infty} (Af(x+y) - Af(y)) \tag{4.5.23}$$

und ist endlich. Die Konvergenz ist auf kompakten Mengen gleichmäßig.

Beweis. Wir nutzen wiederum die Identität aus Gleichung (4.4.2). Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $C \subset \mathbb{R}$ eine genügend große kompakte Menge mit nichtleerem Inneren, die neben dem Träger von f auch den Träger aller f_x für alle $x \in K$ enthalte, d.h. für alle $z \notin C$ und $x \in K$ gelte $f_x(z) = 0$. O.B.d.A. sei $C = [-a, a]$ für ein genügend großes $a > 0$. Aus der Identität (4.4.2) erhalten wir für alle $0 < s < 1$, $x \in K$ und $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} U^s f_x(y) - U^s f(y) &= \mathbb{E}_y \left[s^{T_C} \left(f_x(S_{T_C}) - f(S_{T_C}) \right) \right] + \mathbb{E}_y \left[s^{T_C} \left(U^s f_x(S_{T_C}) - U^s f(S_{T_C}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_y \left[s^{T_C} \left(f_x(S_{T_C}) - f(S_{T_C}) \right) \right] + \mathbb{E}_y \left[s^{T_C} \left(A^s f(S_{T_C}) - A^s f_x(S_{T_C}) \right) \right] \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3.4 können wir den Grenzübergang $s \uparrow 1$ vollziehen, und erhalten

$$Af(y) - Af_x(y) = \mathbb{E}_y\left[f_x(S_{T_C}) - f(S_{T_C})\right] + \mathbb{E}_y\left[Af(S_{T_C}) - Af_x(S_{T_C})\right]. \qquad (4.5.24)$$

Zu zeigen bleibt die (lokal gleichmäßige) Konvergenz von

$$\mathbb{E}_y\left[f_x(S_{T_C}) - f(S_{T_C})\right] + \mathbb{E}_y\left[Af(S_{T_C}) - Af_x(S_{T_C})\right]$$

für $y \to \pm\infty$. Da Af nach Lemma 4.3.4 stetig ist und $\mathbb{P}^{S_{T_C}}$ außerhalb von C verschwindet, genügt es hierfür zu zeigen, dass $(\mathbb{P}_y^{S_{T_C}})_{y\in\mathbb{R}}$ für $|y| \to \infty$ stationär wird, also mit anderen Worten, dass S_{T_C} für $|y| \to \infty$ in Verteilung konvergiert. Sodann erhalten wir aus (4.5.24) die Existenz und Endlichkeit von

$$\lim_{y\to\pm\infty} \left(Af(x+y) - Af(y)\right).$$

Dass die Konvergenz auf kompakten Mengen gleichmäßig ist, folgt aus der Stetigkeit von f und Af: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Aus $\mathbb{P}_y^{S_{T_C}} \in \mathfrak{W}(C)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\big(Af(y) - Af_{\tilde{x}}(y)\big) - \big(Af(y) - Af_x(y)\big)\right| \\
&= |Af_x(y) - Af_{\tilde{x}}(y)| \\
&= \left|\mathbb{E}_y\left[\big(f_{\tilde{x}}(S_{T_C}) - f_x(S_{T_C})\big)\right] + \mathbb{E}_y\left[\big(Af_x(S_{T_C}) - Af_{\tilde{x}}(S_{T_C})\big)\right]\right| \\
&\le \|f_{\tilde{x}}\big|_C - f_x\big|_C\|_\infty + \|Af_x\big|_C - Af_{\tilde{x}}\big|_C\|_\infty
\end{aligned}$$

für $x, \tilde{x} \in K$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also – da Af und f auf $C + K$ gleichmäßig stetig sind – ein $\delta > 0$, so dass aus $|\tilde{x} - x| < \delta$

$$|Af(y) - Af_{\tilde{x}}(y)) - (Af(y) - Af_x(y)| < \varepsilon$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ folgt. Mit einem Überdeckungsargument wie in Teil (b) des Beweises von Lemma 4.5.3 folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz. Der Beweis wird mit dem folgenden Lemma abgeschlossen. □

4.5.7 Lemma
Sei $C := [-a, a]$ für ein $a > 0$ und $(S_n)_{n\ge 0}$ ein rekurrenter, streng nichtarithmetischer RW mit endlicher Varianz. Dann ist die Verteilungsfamilie $(\mathbb{P}_{-y}^{S_{T_C}})_{y\in\mathbb{R}}$ für $y \to \pm\infty$ schwach konvergent, bzw. $S_{T_{C+y}} - y$ konvergiert für $y \to \pm\infty$ in Verteilung.

Zunächst wollen wir hierfür einige Begriffe einführen, und zwar *Kopiensummenfolgen* und die sogenannten *Leiterindizes* als einen Spezialfall (s. [4], S. 247). Ist τ eine Stoppzeit für einen SRW $(S_n)_{n\geq 0}$, so existiert eine Mengenfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $B_n \in \mathcal{B}^n$, so dass $\tau := \inf\{n \geq 1 : (S_1, ..., S_n) \in B_n\}$. Definieren wir $\sigma_0 := 0$, sowie die *Folge der formalen Kopien von* τ, $(\tau_n)_{n\geq 1}$, mittels

$$\tau_{n+1} := \inf\{k \geq 1 : (S_{\sigma_n+1} - S_{\sigma_n}, ..., S_{\sigma_n+k} - S_{\sigma_n}) \in B_k\}$$

für alle $n \geq 0$, wobei die *Kopiensummenfolge* $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ durch $\sigma_n := \tau_1 + ... + \tau_n$ $(n \geq 1)$ definiert ist. Gemäß [4], 27.1, gilt die Eigenschaft

$$\mathbb{P}^{(S_{\sigma_n+k}-S_{\sigma_n})_{k\geq 0}\,|\,S_{\sigma_n}} = \mathbb{P}_0^{(S_k)_{k\geq 0}}.$$

Wählen wir im Falle eines SRW speziell $\tau := \sigma^{>(\geq)} := \inf\{n \geq 0 : S_n > (\geq)\, 0\}$, erhalten wir nach diesem Schema die *Folge* $(\sigma_n^{>(\geq)})_{n\geq 0}$ *der streng (schwach) aufsteigenden Leiterindizes*. Die zugehörige Folge $(S_{\sigma_n^{>(\geq)}})_{n\geq 0}$ heißt die *Folge der streng (schwach) aufsteigenden Leiterhöhen*. Weiter wird hierauf aufbauend in [4], 27.3, nachgewiesen, dass im Falle einer f.s. endlichen Stoppzeit τ durch $(\sigma_n, S_{\sigma_n})_{n\geq 0}$ ein RW mit unabhängig identisch $\mathbb{P}^{(\tau,S_\tau)}$-verteilten Zuwächsen definiert ist. Völlig analog zu den aufsteigenden Leiterindizes, bzw. -höhen, lassen sich die absteigenden Leiterindizes nebst absteigenden Leiterhöhen definieren. Es sei darauf hingewiesen sei, dass die zu den auf- bzw. absteigenden Leiterindizes gehörigen Stoppzeiten im Falle eines rekurrenten RW, dessen Zuwachsverteilung von δ_0 verschieden ist, f.s. endlich sind (☞ [4], 27.7). Für den RW $(S_{\sigma_n^{>(\geq)}})_{n\geq 0}$ folgen wir der Notation aus oben genannter Quelle und bezeichnen diesen als $(S_n^{>(\geq)})_{n\geq 0}$.

Beweis von Lemma 4.5.7 gemäß [6]. Per Symmetrie genügt es, $\mathbb{P}_y^{S_{T_C}}$ für $y \to \infty$ zu untersuchen Sei nun $\tau(s) := \inf\{n \geq 0 : S_n > s\}$ die *Erstaustrittszeit* des RW $(S_n)_{n\geq 0}$ und $R_s := S_{\tau(s)} - s$ der zugehörige Exzess, der für $y \to \infty$ in Verteilung gegen eine Zufallsgröße R mit Verteilungsfunktion

$$\mathbb{P}\left(R \leq t\right) = \frac{1}{\mathbb{E}S_1^{\geq}} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\left(S_1^{\geq} > r\right) \lambda\!\!\lambda(dr)$$

konvergiert. Für $-a \leq t \leq a$ folgt

$$\mathbb{P}\left(S_{T_{C+y}} - y \leq t\right) = \mathbb{P}\left(S_{T_{C+y}} - y \leq t, R_{y-a} \leq 2a\right) + \mathbb{P}\left(S_{T_{C+y}} - y \leq t, R_{y-a} > 2a\right)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}\left(S_{T_{C+y}} - y \le t, R_{y-a} \le 2a\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(S_{T_{C+y}} - S_{\tau(y-a)} - y \le t - S_{\tau(y-a)}, R_{y-a} > 2a\right) \\ &= \mathbb{P}\left(R_{y-a} \le t + a\right) + \int\limits_{(2a,\infty)} \mathbb{P}\left(S_{T_{C+a-r}} \le t\right) \mathbb{P}\left(R_{y-a} \in dr\right). \end{aligned}$$

Da die Grenzverteilung $\mathbb{P}^R$ $\lambda\!\!\lambda$-stetig und $\mathbb{P}\left(S_{T_{C+a-r}} \le t\right)$ in r f.s. stetig ist, folgt die Konvergenz des letzten Ausdrucks und damit die Behauptung.

□

Mit Lemma 4.5.6 schließen wir den Beweis von (3.1.7) aus Satz 3.1.4 ab.

4.5.8 Korollar

Sei $\sigma^2 < \infty$ und $f \in \mathfrak{F}$. Dann gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} \left(Af(x+y) - Af(y)\right) = \pm x\sigma^{-2} J(f) \tag{4.5.25}$$

und die Konvergenz ist auf kompakten Mengen gleichmäßig.

Beweis. Sei o.B.d.A. der Trivialfall $x \neq 0$ ausgeschlossen. Wir zeigen, dass

$$\lim_{y\to\pm\infty} Af(x+y) - Af(y) = x \lim_{y\to\pm\infty} \frac{Af(y)}{y}.$$

Die lokale Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $Af(x+y) - Af(y)$ wurde in Lemma 4.5.6 gezeigt und aus der Konvergenz von $Af(y)/y$, die in Lemma 4.2.8 nachgewiesen wurde, folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung.

Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gegeben. Per Symmetrie genügt es den Limes für $y \to \infty$ zu betrachten. Definiere die Steigungen

$$m_1 := \lim_{y\to\infty} \frac{Af(y)}{y}, \text{ sowie } m_2 := \lim_{y\to\infty} \frac{Af(x+y) - Af(y)}{x},$$

wobei nach Lemma 4.2.8 $m_2 = \sigma^{-2} J(f)$ gilt.

Gegenannahme: $m_1 \neq m_2$. O.B.d.A. nehmen wir $m_1 > m_2 + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ an. Sei $y_0 = xN$ mit $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $(Af(x+y) - Af(y))/x \ge m_1 + \varepsilon$ für alle $y \ge y_0$. Dann gilt $\left(Af(nx + y_0) - Af((n-1)x + y_0)\right)/x \ge m_1 + \varepsilon$ für alle $n \ge 1$ und durch Bildung einer Teleskopsumme erhalten wir

$$\frac{Af(nx+y_0)-Af(y_0)}{nx} \geq m_1+\varepsilon$$

für alle $n \geq 1$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} m_1+\varepsilon &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{Af(nx+y_0)-Af(y_0)}{nx} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{Af((n+N)x)}{nx} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{Af(nx)}{(n-N)x} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{Af(nx)}{nx}\frac{n}{n-N} = m_1 \end{aligned}$$

und wir erhalten einen Widerspruch. □

Satz 3.1.4 ist somit unter dem zu Beginn des Abschnitts formulierten Vorbehalt bewiesen. Die Einschränkung “$f \in \mathfrak{F}^+$” in (3.1.7) im Fall $\sigma^2 = \infty$ ist für das Ziel dieses Abschnitts, den Beweis des zweiten Hauptsatzes, unerheblich.

Beseitigung des Vorbehalts und Abschluss des Beweises.
Zur Komplettierung des Beweises zeigen wir nun, dass alle Grenzwerte, die wir beim Grenzübergang $s_n \uparrow 1$ $(n \to \infty)$ erhielten, unabhängig von der Wahl der Teilfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind. Im folgenden Lemma kippt der erste Dominostein und wir erhalten die Unabhängigkeit von $L_B(x) = \lim_{n\to\infty} L_B^{s_n}(x)$ von der Wahl der Teilfolge. Die Unabhängigkeit der weiteren Terme erhalten wir sodann aus den Gleichungen, die im Laufe dieser Arbeit ermittelt wurden.

4.5.9 Lemma

Sei $f \in \mathfrak{F}^+$ oder $\sigma^2 < \infty$ und $f \in \mathfrak{F}$. Dann gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} G_B f_y(x) = J(f)\left(L_B(x) \pm \sigma^{-2}\int (x-z)\,\Pi_B(x,dz)\right) \tag{4.5.26}$$

und die Konvergenz ist lokal gleichmäßig in x.

Beweis. Die Identität (4.3.11) liefert für $f \in \mathfrak{F}$ und $x \in \mathbb{R}$ durch Hinzufügen von $Af_y(0) - \Pi_B Af_y(0)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)(= 0)$

$$\big(Af_y(x) - Af_y(0)\big) - \Pi_B\big(Af_y - Af_y(0)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}\big)(x) = -G_B f_y(x) + L_B(x)J(f) \qquad (4.5.27)$$

Mit den Konvergenzaussagen aus Korollar 4.5.5 bzw. Lemma 4.5.6 können wir den Term $Af_y(x) - Af_y(0)$ jeweils durch seinen Grenzwert für $y \to \pm\infty$ ersetzen:

$$\begin{aligned}
G_B f_y(x) \quad &= \quad J(f)L_B(x) + \Pi_B\left(Af_y - Af_y(0)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}\right)(x) - \big(Af_y(x) - Af_y(0)\big)\\
&= \quad J(f)L_B(x) + \int Af_y(z) - Af_y(0)\,\Pi_B(x,dz) - \big(Af_y(x) - Af_y(0)\big)\\
&= \quad J(f)L_B(x) + \int Af(z-y) - Af_y(0)\,\Pi_B(x,dz) - \big(Af(x-y) - Af_y(0)\big)\\
&\overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} \quad J(f)L_B(x) \mp J(f)\int z\sigma^{-2}\,\Pi_B(x,dz) \pm J(f)x\sigma^{-2}\\
&= \quad J(f)\left(L_B(x) \pm \sigma^{-2}\int (x-z)\,\Pi_B(x,dz)\right).
\end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile wurde die lokale Gleichmäßigkeit der Konvergenz genutzt, um den Integranden durch seinen Grenzwert zu ersetzen. □

Nun beweisen wir, dass der Limes in (4.3.9) und damit alle Grenzwerte $s \uparrow 1$ unabhängig von der Wahl einer speziellen, gegen 1 konvergenten Teilfolge $(s_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ sind:

Beweis. Wir zeigen also die Unabhängigkeit von $d = \lim_{s\uparrow 1} d^s$ von der Wahl der Folge. In Gleichung (4.5.26) liegt eine Darstellung von $L_B(x)$ vor, in der der Ausdruck nur noch von G_B bzw. Π_B abhängt. Deren Konvergenz wurde in den Vorbereitungen in Abschnitt 3.3 für beliebige Folgen $s \uparrow 1$ hergeleitet, so dass selbige Unabhängigkeit auch für $L_B(x)$ gilt. Gleiches gilt für d: Mittels (4.3.7) aus Lemma 4.3.2 folgt auch hier die Unabhängigkeit von der Wahl der Folge. Gemäß Lemma 4.3.3 gilt also, dass der Grenzwert

$$\lim_{s\uparrow 1} d^s = d \qquad (4.5.28)$$

existiert und endlich ist. Der Beweis von Satz 3.1.3 aus Abschnitt 4.4 und der in diesem Abschnitt geführte Beweis von Satz 3.1.4 lassen sich nun für beliebige Folgen $s \uparrow 1$ durchführen. □

5. Anwendung auf Markov-Random-Walks

Widmen wir uns nun der Frage, inwiefern sich der Rekurrenzsatz auf Markov-Random-Walks (MRWs) adaptieren lässt und ob sich für diese eine ähnliche Formulierung finden lässt.

Zunächst definieren wir hierfür MRWs und das ihnen zugrundeliegende Modell Markov-modulierter Prozesse. Anschließend zeigen wir, dass wir den Verteilungen eines MRW eine regelmäßige Struktur verleihen können, indem wir den Prozess mit der stationären Verteilung starten. Durch eine zyklische Zerlegung des MRWs erhalten wir gesampelte RWs, die zum Ziel der Formulierung eines fourieranalytischen Rekurrenzkriteriums der Form aus (Gl. 1) führen, falls wir unterstellen, dass die Zuwächse des MRWs unabhängig von ihrer Modulation endliche Varianz besitzen. Zum Abschluss dieses Kapitels diskutieren wir anhand eines einfachen Beispiels die Form, die der Rekurrenzsatz im allgemeinen Fall annimmt.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf den Fall, dass die Steuerkette des MRWs eine positiv-rekurrente diskrete Markov-Kette mit abzählbarem Zustandsraum bildet. Die positive Rekurrenz der Steuerkette ist bei für unser Vorhaben eine notwendige Annahme, da die hieraus resultierende zyklische Struktur des Steuerprozesses die Voraussetzung für die Rekurrenzuntersuchungen bildet.

5.1. Das zugrundeliegende Modell

Bei einem gewöhnlichen RW, der im ersten Kapitel ausführlich diskutiert wurde, handelt es sich um eine Partialsummenfolge unabhhängig identisch verteilter Zufallsgrößen. Auch bei MRWs haben wir es mit Partialsummenfolgen einer Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\geq 0}$ zu tun, die gegenüber dem gewöhnlichen Fall allerdings nicht mehr unabhängig identisch verteilt sind. Stattdessen wird die Verteilung der Zuwächse durch eine Markovkette $M := (M_n)_{n\geq 0}$, der sogenannten *Steuerkette*, moduliert.

Ein zeitlich homogener Markov-Prozess $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$, mit Zustandsraum $(\mathcal{S}, \mathfrak{S}) \otimes (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist ein *Markov-modulierter Prozess*, wenn die Verteilung von (M_{n+1}, X_{n+1}) von (M_n, X_n) nur über M_n abhängt und also für alle $n \geq 0$ f.s. $\mathbb{P}^{(M_{n+1},X_{n+1})|M_n,X_n} = \mathbb{P}^{(M_{n+1},X_{n+1})|M_n}$ gilt. Ein Markov-modulierter Prozess ist eindeutig durch den hierdurch gegebenen Übergangskern $\mathbb{P} : \mathcal{S} \times (\mathfrak{S} \times \mathcal{B}) \longrightarrow [0,1]$ und durch seine Startverteilung $\mathbb{P}^{(M_0,X_0)}$ definiert. Wir definieren wie in [1] ein Standardmodell durch $\mathbb{P}_{\nu,\lambda}^{(M_0,X_0)} = \nu \otimes \lambda$, wobei $\nu \otimes \lambda \in \mathfrak{W}(\mathcal{S} \times \mathbb{R})$ die Startverteilung sei.

Der Prozess $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ mit $S_n := X_0 + X_1 + ... + X_n$ wird *Markov-Random-Walk* (MRW) genannt, wobei wir für X_0 in Anlehnung an die Definitionen aus dem ersten Kapitel auch S_0 schreiben. Der Übergangskern des MRWs ist also durch $\mathbb{P}^*((x,s), A \times B) = \mathbb{P}(x, A \times B - s)$ gegeben. Aus $\mathbb{P}$ ergibt sich ferner der Übergangskern $\mathbb{P}'$ der Steuerkette als die Projektion auf $A \times \mathbb{R}$: $\mathbb{P}'$ ist für alle $x \in \mathcal{S}$ und $A \in \mathfrak{S}$ durch $\mathbb{P}'(x, A) = \mathbb{P}(x, A \times \mathbb{R})$ definiert.

Wir definieren abkürzend $\mathbb{P}_\nu^{(M_0,S_0)} = \nu \otimes \delta_0$, sowie $\mathbb{P}_s^{(M_0,S_0)} = \delta_s \otimes \delta_0$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Entsprechendes gelte für $\mathbb{E}_\nu$ und $\mathbb{E}_s$. Diese Notation erspart uns die Erwähnung der Verteilung von S_0, die bei der Untersuchung der Rekurrenz des MRWs keine Rolle spielt.

Gemäß [1], 1.3, gilt für die Zuwächse $(X_n)_{n\geq 0}$ eines MRWs, bzw. für den in eine Markov-modulierte Folge eingebetteten Prozess $(X_n)_{n\geq 0}$, $\mathbb{P}^{X_0|M} = \mathbb{P}^{X_0|M_0}$, sowie $\mathbb{P}^{X_n|M} = \mathbb{P}^{X_n|M_n,M_{n-1}}$ für alle $n \geq 1$ und hierdurch ist ein Übergangskern $\mathbb{K} : \mathcal{S}^2 \times \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$ gegeben. Daher ist es zweckmäßig, für alle $n \geq 1$ und $r, s \in \mathcal{S}$ $\mathbb{P}_{(r,s)}^{X_n} := \mathbb{P}^{X_n|M_1=s,M_0=r}$ und entsprechend $\mathbb{E}_{(r,s)}$ zu definieren.

Die Definition der Rekurrenz erfolgt im Falle eines MRWs analog zur Definition für gewöhnliche RWs. Sei

$$\mathfrak{R} = \{x \in \mathbb{R} : S_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \text{ u.o. für alle } \varepsilon > 0\}.$$

Unter einem rekurrenten MRW verstehen wir einen MRW $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ mit $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ für eine geeignete Startverteilung $\nu \otimes \lambda \in \mathfrak{W}(\mathcal{S} \times \mathbb{R})$, was gemäß [3], S. 125, genau dann der Fall ist, wenn

$$\mathbb{P}_{\nu,\lambda}(\mathcal{S}_n \in B \text{ unendlich oft}) = 1$$

für alle offenen $B \in \mathcal{B}$ erfüllt ist.

5.2. Zyklische Zerlegung der Steuerkette und stationäre Verteilung

Von nun an bezeichnen wir mit $\mathbf{P} = (p_{rs})_{r,s\in\mathcal{S}}$ die Übergangsmatrix von M. In diesem Abschnitt definieren wir erst die stationäre Verteilung von M und leiten aus ihrer Stationarität eine Vermutung über die mögliche Formulierung des Rekurrenzsatz für MRWs ab. Anschließend notieren wir einen Satz dazu, wie man mit Hilfe der zyklischen Zerlegung der Steuerkette aus einem MRW einen gesampelten RW erhält. Dessen Bedeutung liegt auf der Hand, denn die stochastische Unabhängigkeit der Zuwächse ist eine Grundvoraussetzung für die Formulierung der Rekurrenzbedingung aus (Gl. 1).

Stationäre Verteilung.
Zunächst nehmen wir eine zyklische Zerlegung der Steuerkette vor, indem wir die sukzessiven Eintrittszeitpunkte in einen (positiv rekurrenten) Zustand $i \in \mathcal{S}$ betrachten. Sei $\tau(i) := \tau_1(i) := \inf\{k \geq 1 : M_k = i\}$ und die Folge sukzessiver Eintrittszeiten $(\sigma_n(i))_{n\geq 0}$ rekursiv durch $\sigma_0(i) := 0$ und

$$\sigma_1(i) := \tau_1(i), \text{ sowie } \sigma_{n+1}(i) := \inf\{k > \sigma_n(i) : M_k = i\} \text{ für alle } n \geq 1.$$

definiert. Weiter setzen wir $\tau_n(i) := \sigma_n(i) - \sigma_{n-1}(i)$ für alle $n \geq 2$. Aufgrund unserer Voraussetzung gilt $\mu_{ii} := \mathbb{E}_i\tau(i) < \infty$ unabhängig von der Wahl des Zustandes i.

Wir definieren zunächst ein stationäres Maß von M durch

$$\xi := \xi^{(i)} := \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{\tau_1(i)-1} \mathbb{1}_{\{M_n\in\,\cdot\,\}}\right].$$

Dann ist $\xi^* = (\xi_i^*)_{i\in\mathcal{S}} = \mu_{ii}^{-1}\xi^{(i)}$ die stationäre Verteilung von $(M_n)_{n\geq 0}$.

Für $r \in \mathcal{S}$, $C \in \mathcal{B}$ und alle $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\xi^*}^{X_k}(C) &= \int_{\mathcal{S}} \mathbb{P}(r,\mathcal{S},C)\mathbb{P}_{\xi^*}^{M_{k-1}}(dr) \\
&= \int_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}} \mathbb{K}(r,s,C)\mathbb{P}^*(r,ds)\xi^*(dr) \qquad (5.2.1)\\
&= \sum_{r,s\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{(r,s)}^{X_1}(C)\, p_{rs}\xi_r^*,
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile [1], 1.1, sowie die Stationarität von ξ^* genutzt wurde.

Die Zuwächse des MRWs sind unter $\mathbb{P}_{\xi^*}$ also für alle $k \geq 1$ identisch gemäß

$$X_k \sim \sum_{r,s \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_{(r,s)} \mathbb{1}_{\{X_1 \in \cdot\}} \, \xi_r^* p_{rs} \tag{5.2.2}$$

verteilt. Ohne großen Aufwand ermittelt man, dass die stationären Zuwächse die F.T. $\sum_{r,s \in \mathcal{S}} \varphi_{r,s} \, \xi_r^* p_{rs}$ besitzen. Dies führt uns zu der Vermutung, dass das Stonesche Rekurrenzkriterium die Form

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{1 - \sum_{r,s \in \mathcal{S}} \xi_r^* p_{rs} \varphi_{r,s}(t)} = \infty, \tag{5.2.3}$$

annimmt, wobei die F.T. $\varphi_{r,s}$ durch $\varphi_{r,s}(t) = \mathbb{E}_{(r,s)} e^{itX_1}$, definiert sei. Der Nachweis, ob dies eine äquivalente Bedingung für Rekurrenz darstellt, ist allerdings weniger trivial als es auf den ersten Blick scheint. Zwar besitzen die Zuwächse von $(S_n)_{n \geq 0}$ unter $\mathbb{P}_\xi$ die F.T. $\sum_{r,s \in \mathcal{S}} \xi_r^* p_{rs} \varphi_{r,s}(t)$, aufgrund der stochastischen Abhängigkeit der $(X_k)_{k \geq 0}$ lässt sich aber der Multiplikationssatz nicht anwenden.

Mittels zyklischer Zerlegung gesampelte Random Walks.

Indem wir zu Teilfolge von $(M_n, S_n)_{n \geq 0}$ übergehen, die wir aus den sukzessiven Eintrittszeiten $(\sigma_n(i))_{n \geq 0}$ der Steuerkette in einen Zustand $i \in \mathcal{S}$ gewinnen, erhalten wir den gesampelten RW $(S_{\sigma_n})_{n \geq 0}$.

5.2.1 Satz (vgl. [1], 3.1)
Die für jedes $n \geq 0$ durch

$$Z_n := (\tau_{n+1}(i), (M_k, X_{k+1})_{\sigma_n(i) \leq k < \sigma_{n+1}(i)})$$

definierten Zyklen sind unter jedem $\mathbb{P}_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{W}(\mathcal{S} \times \mathbb{R}))$ unabhängig verteilt und besitzen für $n \geq 1$ dieselbe Verteilung wie Z_0 unter $\mathbb{P}_i$.
$(S_{\sigma_n(i)})_{n \geq 0}$ ist also unter $\mathbb{P}_i$ ein SRW mit unabhängig identisch verteilten Zuwächsen $\sum_{k=\sigma_n(i)+1}^{\sigma_{n+1}(i)} X_k$, deren Verteilung der von $\sum_{k=1}^{\tau(i)} X_1$ unter $\mathbb{P}_i$ entspricht. Entsprechendes gilt unter jedem $\mathbb{P}_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{W}(\mathcal{S} \times \mathbb{R}))$ für den VRW $(S_{\sigma_n(i)} - S_0)_{n \geq 0}$.

Beweis. Mit $\mathfrak{F}_n = \sigma((M_k, X_k)_{0 \leq k \leq n})$ gilt für alle $\lambda \in \mathfrak{W}(\mathcal{S})$ und $n \geq 1$ unter Beachtung von $M_{\sigma_n(i)} \equiv i$ für alle $n \geq 1$

$$\mathbb{P}_\lambda^{(M_{\sigma_{n(i)+k}}, X_{\sigma_{n(i)+k}})_{k\geq 1}|\mathfrak{F}_{\sigma_n}} = \mathbb{P}_i^{(M_k, X_k)_{k\geq 1}}.$$

Da die Z_n für alle $n \geq 1$ $\mathfrak{F}_{\sigma_{n+1}}$-messbare Funktionen auf $(M_{\sigma_n}, (M_{\sigma_{n(i)+k}}, X_{\sigma_{n(i)+k}})_{k\geq 1})$ bilden und i positiv rekurrent ist, folgt der erste Teil der Behauptung. Aus der positiven Rekurrenz folgt außerdem die Endlichkeit der Zykluslängen.

Die zweite Aussage ergibt sich daraus, dass die Zuwächse $S_{\sigma_n(i)} - S_{\sigma_{n-1}(i)}$ für $n \geq 1$ eine Abbildung des jeweils n-ten Zyklus' bilden und daher unabhängig identisch verteilt sind. □

5.3. Beweis der Vermutung bei Existenz der ersten Momente

Im Fall, dass das stationäre erste Moment $\mu = \mathbb{E}_{\xi^*} X_1$ der Zuwächse existiert, können wir die Richtigkeit der Vermutung (5.2.3) belegen.

Nun zeigen wir, dass wir bei der Untersuchung der Rekurrenz des MRWs, stattdessen zur Untersuchung eines gesampelten RWs $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ übergehen dürfen. Ist $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ für irgendein $i \in \mathcal{S}$ rekurrent, so auch der zugrundeliegende MRW. Folgt aber aus der Transienz aller $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ $(i \in \mathcal{S})$ bereits die Transienz von $(S_n)_{n\geq 0}$?

Falls die ersten Momente $\mathbb{E}_i X_1$ für alle $i \in \mathcal{S}$ existieren (eine notwendige Voraussetzung für die Existenz von μ) gilt aufgrund der Eindeutigkeit der stationären Verteilung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i S_{\tau(i)} &= \mathbb{E}_{\xi(i)} X_1 \\
&= \mu_{ii} \mathbb{E}_{\xi^*} X_1 \\
&= \frac{\mu_{ii}}{\mu_{jj}} \mathbb{E}_{\xi(j)} X_1 = \frac{\mu_{ii}}{\mu_{jj}} \mathbb{E}_j S_{\tau(j)}
\end{aligned}$$

für $i, j \in \mathcal{S}$. Es besitzen also entweder alle Zuwächse $S_{\tau(i)}$ $(i \in \mathcal{S})$ Erwartungswert 0, oder keiner. Genauer folgt aus $\mathbb{E}_i S_{\tau(i)} \gtreqless 0$ für ein $i \in \mathcal{S}$, dass $\mathbb{E}_j S_{\tau(j)} \gtreqless 0$ für alle $j \in \mathcal{S}$ und der MRW hat einen stationären Drift $\mathbb{E}_{\xi^*} X_1$ genau dann, wenn einer der gesampelten RWs einen Drift besitzt. Insbesondere folgt aus der Transienz von $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ für ein beliebiges $i \in \mathcal{S}$ also gleich die Transienz aller $(S_{\sigma_n(j)})_{n\geq 0}$.

Hieraus leiten wir den folgenden Satz ab:

5.3.1 Satz (vgl. [1], 3.4)
Aus $\mathbb{E}_i S_{\tau(i)} \gtrless 0$ *folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \pm\infty \ \mathbb{P}_\lambda \ f.s. \tag{5.3.1}$$

für alle $\lambda \in \mathfrak{W}(\mathcal{S} \times \mathbb{R})$ *und damit die Transienz des MRWs.*

Beweis . Wir geben den Beweis aus [1] wieder. Sei $\mu := \mathbb{E}_\xi X_1$ der stationäre Drift des MRWs und o.B.d.A. $\mu > 0$. Durch Übergang zum MRW $(M_n, \sum_{k=0}^n X_k^\pm)$, der den stationären Drift $\mathbb{E}_{\xi^*} X_1^\pm$ besitzt, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass alle X_n nichtnegativ sind.

Die Kopiensummenfolge $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ ist unter jedem $\mathbb{P}_\lambda$ ($\lambda \in \mathfrak{W}(\mathcal{S})$) ein verschobener Erneuerungsprozess[1] mit Drift μ_{ii}. Sei $T(n) = \inf\{k \geq 1 : \sigma_k > n\}$ die zugehörige Erstaustrittszeit. Aus [4], Lemma 10.3, folgt

$$\frac{T(n)}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu_{ii}} \text{ f.s..}$$

Ferner folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{S_{\sigma_{T(n)}}}{T(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\mu_{ii} \text{ f.s.}$$

und damit

$$\frac{S_{\sigma_{T(n)}}}{n} = \frac{S_{\sigma_{T(n)}}}{T(n)} \frac{T(n)}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \text{ f.s.}$$

Die Behauptung folgt nun durch

$$\frac{S_{\sigma_{T(n)-1}}}{n} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_{\sigma_{T(n)}}}{n}.$$

□

Wir wissen also, dass unter den gegebenen Voraussetzungen ein MRW genau dann rekurrent ist, wenn dies für einen der gesampelten RWs $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ der Fall ist. Nun gilt

$$\mathbb{E}_i S_{\tau(i)} = \mu\mu_{ii} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_{\xi^*} X_1 = \mu = 0$$

[1] d.h. ein Erneuerungsprozess, der nicht im Punkte 0 startet

und damit, dass das Verteilungsgemisch

$$Q := \sum_{r,s \in \mathcal{S}} \xi_r p_{rs} \mathbb{P}_{(r,s)}^{X_1}$$

genau dann den Erwartungswert 0 besitzt, wenn der MRW rekurrent ist. Offensichtlich ist Q wieder eine Verteilung, die wir als Zuwachsverteilung auffassen können. Diese definiert genau dann einen rekurrenten RW, wenn der zugehörige MRW rekurrent ist und besitzt dieselbe F.T. wie ein stationärer Zuwachs des MRWs, nämlich

$$\sum_{r,s \in \mathcal{S}} \xi_r p_{rs} \varphi_s.$$

Aus dem Rekurrenzsatz folgt schließlich die Vermutung (5.2.3).

5.4. Ausblick: Der allgemeine Fall

Wir beschließen diese Arbeit mit einem Ausblick darauf, welche Form der Rekurrenzsatz dem Fall annimmt, dass wir keine Annahmen an die Momente der Zuwächse den MRWs treffen. Dazu besprechen wir zuerst ein einfaches Beispiel, um danach kurz auf die Möglichkeiten zu blicken, die gesampelte RWs bieten.

Ein einfaches Beispiel: MRWs mit alternierender Zuwachsverteilung.
Wir beginnen mit dem sehr einfachen Fall einer Steuerkette, die abwechselnd zwischen zwei Zuständen wechselt, so dass die Verteilung der Zuwächse zwischen zwei Verteilungen alterniert. Es sei also ein MRW gegeben, dessen Steuerkette den Zustandsraum $\mathcal{S} = \{s_1, s_2\}$ und die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. $(M_n)_{n \geq 0}$ besitzt die stationäre Verteilung

$$\xi = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

so dass unsere Vermutung in diesem Fall besagt, dass Rekurrenz äquivalent zu

$$\int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\varphi_1(t)+\frac{1}{2}\varphi_2(t)\right)}\right) dt = \infty$$

ist, wobei $\varphi_{1/2} = \mathbb{E}_{s_1/s_2} e^{itX_1}$ sei.

Der Rekurrenzsatz liefert aber zunächst ein anderes Resultat. Formulieren wir den MRW wie folgt: Seien $X_1, X_2, ...$, sowie $Y_1, Y_2, ...$ jeweils unabhängig identisch Verteilte Zuwächse (mit Spanne $d \in [0, \infty)$) und der Prozess $(S_n)_{n\geq 0}$ für $n \geq 0$ gegeben durch

$$S_{2n+1} = S_{2n} + X_{n+1}, \text{ bzw. } S_{2n+2} = S_{2n+1} + Y_{n+1}$$

und einem von den Zuwächsen unabhängigen Anfangspunkt $S_0 \in \mathfrak{W}_d(\mathbb{R})$.

Rekurrenz ist dann äquivalent dazu, dass der durch die Verteilung von X_1+Y_1 definierte RW rekurrent ist, denn es gilt

$$\mathbb{P}\left(S_n \in B \text{ u.o.}\right) \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\{S_{2n} \in B \text{ u.o.}\} \cup \{S_{2n+1} \in B \text{ u.o.}\}\right)$$

und sowohl der Fall

$$\mathbb{P}\left(S_{2n} \in B \text{ u.o.}\right) = 1,$$

als auch

$$\mathbb{P}\left(S_{2n+1} \in B \text{ u.o.}\right) = 1,$$

sind äquivalent zur Rekurrenz des SRW $(\hat{S}_n)_{n\geq 0}$, der durch

$$\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (X_n + Y_n)$$

für $n \geq 1$ und $S_0 = 0$ definiert wird. Hierzu sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Rekurrenz unter einer beliebigen Startverteilung aus $\mathfrak{W}_d(\mathbb{R})$ erhalten bleibt und dass sowohl die Verteilung von S_0 auch die von $S_0 + X_1$ in $\mathfrak{W}_d(\mathbb{R})$ liegen.
Nun haben sowohl $(S_{2n})_{n\geq 0}$, als auch $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ unabhängig identisch verteilte Zuwächse, die wie $X_1 + Y_1$ verteilt sind und die F.T. $\varphi_1\varphi_2$ besitzen. Aus dem Rekurrenzsatz

folgt damit unmittelbar, dass die Rekurrenz von $(S_n)_{n\geq 0}$ äquivalent ist zu

$$\int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\varphi_1(t)\varphi_2(t)}\right) dt = \infty,$$

wobei φ_1 die F.T. von X_1 und φ_2 die F.T. von Y_1 sei.

Bemerkung. Im Falle deterministischer Steuerketten mit Zyklen der Länge $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich völlig analog, dass die Rekurrenz des zugehörigen MRWs äquivalent zu

$$\int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{1}{1-\prod_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n(t)}\right) dt = \infty$$

ist.

Der Rekurrenzsatz via Sampling.

Hier stellt sich wie schon in Abschnitt 5.3 die Frage, inwiefern sich die Rekurrenz des MRWs durch die Rekurrenz der aus ihm gewonnenen RWs $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ $(i \in \mathcal{S})$ beschreiben lässt. Mit anderen Worten: Folgt aus der Transienz aller $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ bereits die Transienz von $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$?

Falls $\mathcal{S}$ endlich ist, beantwortet sich diese Frage leicht. Vermöge

$$\{S_n : n \geq 0\} = \bigcup_{i\in\mathcal{S}} \{S_{\sigma_n(i)} : n \geq 0\}.$$

folgt aus der Rekurrenz des MRWs die Rekurrenz mindestens eines der RWs $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ für ein $i \in \mathcal{S}$, denn es gilt

$$|\{n \geq 0 : S_n \in I\}| = \left|\bigcup_{i\in\mathcal{S}} \{n \geq 0 : n = \tau_k(j) \text{ mit } S_{\tau_k(j)} \in I \text{ für ein } j \in \mathcal{S} \text{ und ein } k \geq 0\}\right|$$

für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Falls $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ rekurrent ist, können wir also zur Formulierung eines Rekurrenzsatzes für ein geeignetes $i \in \mathcal{S}$ zu $(S_{\sigma_n(i)})_{n\geq 0}$ übergehen, was im transienten Fall trivialerweise möglich ist, da dann alle derart gebildeten RWs transient sein müssen.

Als nächstes bietet sich also an, die Frage vollständig zu klären, ob der Übergang zu $(S_{\sigma_n(j)})_{n\geq 0}$ $(j \in \mathcal{S})$ auch im Falle eines unendlichen Zustandraumes der Steuerkette möglich ist. Dann lässt sich der Rekurrenzsatz einfach adaptieren, indem wir die F.T. $\mathbb{E}_j e^{itS_{\tau(j)}}$ in (Gl. 1) einsetzen.

Weiter ließe sich prüfen, ob sich mit Hilfe des so gewonnenen Kriteriums Vermutung (5.2.3) bestätigen lässt.

Der noch nicht diskutierte Fall einer nicht diskreten Steuerkette M bietet weitere Möglichkeiten zur Ausweitung der Ergebnisse.

A. Fourier-Analyse

Die Fouriertransformation werden wir in diesem Kapitel als eine umkehrbare Transformation eines Wahrscheinlichkeitsmaßes einführen. Ihre Bedeutung in dieser Arbeit ist offensichtlich, aber auch in anderen Zusammenhängen erweist sich die Fouriertransformation als nützliches Werkzeug beim Nachweis von Eigenschaften der transformierten Objekte. Mit der Wortwahl "Objekt" wird bereits angedeutet, dass die Fouriertransformation keineswegs aussschließlich Wahrscheinlichkeitstheoretikern vorbehalten bleibt, sondern auch in anderen Themenfeldern, wie etwa der Signalverarbeitung, ihren Nutzen findet. Dort werden allerdings anstelle von Wahrscheinlichkeitsmaßen Funktionen transformiert. Als Verallgemeinerung der Fourier-Reihen aufgefasst lässt sich die Fouriertransformierte dann als Darstellung des Frequenzspektrums auffassen, wobei im Unterschied zur Fourier-Reihen-Entwicklung nicht vorausgesetzt werden muss, dass die zu transformierende Funktion periodisch ist. Bei der folgenden Einführung werden wir auf Interpretationen der Fouriertransformation verzichten, aber viele schöne Eigenschaften der F.T. herausstellen.

A.1. Die Fouriertransformation und grundlegende Eigenschaften

A.1.1 Definition (Fouriertransformierte)
Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$. Dann ist seine Fouriertransformierte (F.T.) φ durch

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\,t\cdot x} Q(dx).$$

als Funktion $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert, wobei $t \cdot x$ das kanonische Skalarprodukt aus t und x bezeichne. Ist X eine d-dimensionale Zufallsgröße mit Verteilung Q, so gilt also

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\,t\cdot X}\right].$$

Entsprechend ist die F.T. einer λ*-integrierbaren Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *durch*

$$\hat{f}(t) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) \lambda(dx)$$

definiert und entspricht damit der F.T. des Maßes $f d\lambda$*.*

Im Folgenden beschränken wir uns auf den für uns interessanten Fall $d = 1$.
Wie sofort ersichtlich besitzt die F.T. φ einer Verteilung Q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ den Definitionsbereich

$$\mathfrak{D}(\varphi) = \{t \in \mathbb{R} : \int\limits_{\mathbb{R}} \left|e^{itx}\right| Q(dx) < \infty\} = \mathbb{R} \tag{A.1.1}$$

Genauere Auskünfte gibt der folgende Satz, der einige wichtige Eigenschaften der F.T. zusammenfasst.

A.1.2 Satz (s. [5], 41.1)
Sei X eine Zufallsgröße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *mit Verteilung Q und F.T.* φ*. Dann gilt*

(a) φ *ist gleichmäßig stetig auf* $\mathbb{R}$

(b) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$

(c) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$

Beweis. Aussage (a) folgt aus der Ungleichung

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = \left|\mathbb{E}\left[e^{i(t+h)X} - e^{itX}\right]\right| \leq \mathbb{E}\left|1 - e^{ihX}\right|.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung ist unabhängig von t und konvergiert nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz für $h \to 0$ gegen 0. Die Aussagen (b) und (c) sind offensichtlich. □

Eine weitere Eigenschaft, die wir mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten, gibt die Parsevalsche Gleichung wieder:

A.1.3 Satz (Parsevalsche Gleichung)
Seien Q_1 *und* Q_2 *endliche Maße mit F.T.* φ_1 *und* φ_2*. Dann gilt*

$$\int \varphi_1(t) Q_2(dt) = \int \varphi_2(t) Q_1(dt)$$

Im Falle zweier L_1-Funktionen f_1 und f_2 hat die Gleichung die Form

$$\int \hat{f}_1(t) f_2(t) dt = \int \hat{f}_2(t) f_1(t) dt$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus dem Satz von Fubini. □

Nun klären wir die Frage, welche Fouriertransformierte im Falle eines Standard Random Walks $(S_n)_{n \geq 0}$ die Verteilungen der S_n besitzen. Anwort gibt der folgende Spezialfall des Multiplikationssatzes.

A.1.4 Satz (s. [5], 40.7)
Seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{R}$ und F.T. φ_X und φ_Y. Dann besitzt $X + Y$ die Fouriertransformierte $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

Beweis. Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$\varphi_{X+Y} = \mathbb{E} e^{it(X+Y)} = \mathbb{E}\left[e^{itX} e^{itY}\right] = \mathbb{E} e^{itX} \mathbb{E} e^{itY}$$

□

Bemerkung. Da die Zuwächse $X_1, X_2, ...$ einer SRW unabhängig identisch verteilt sind, gilt $\mathbb{P}^{S_n} = \mathbb{P}^{\sum X_k}$ und wir erhalten als F.T. φ^n.

Der folgende Satz gibt uns Auskunft über die Differenzierbarkeit der F.T. einer Verteilung im Punkte 0 und den Zusammenhang zwischen den Ableitungen und Momenten der Verteilung.

A.1.5 Satz
Sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit charakteristischer Funktion φ und sei $\mathbb{E}\left[|X|^{n+\delta}\right] < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$. Dann ist φ n-mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k e^{itX}\right]$$

für $1 \leq k \leq n$ und insbesondere

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

Außerdem erhalten wir in diesem Fall die Taylornäherung n-ter Ordnung durch

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k \mathbb{E}\left[X^k\right]}{k!} + o(|t|^n)$$

und es gilt

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k \mathbb{E}\left[X^k\right]}{k!} + R(t)$$

mit Restglied R, für das die Abschätzung

$$R(t) \leq \frac{2^{1-\delta} \mathbb{E}\left[\left|X^{n+\delta}\right|\right] \left|t^{n+\delta}\right|}{(1+\delta) \cdot \ldots \cdot (n+\delta)}.$$

gilt. Existiert umgekehrt $\varphi^{(2n)}(0)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ist endlich, so folgt $\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] < \infty$.

Beweis. ☞ [7], S. 277 ff. □

Die F.T. ist eine umkehrbare Transformation, aus der wir das Wahrscheinlichkeitsmaß zurückgewinnen können. Insbesondere sind Verteilungen also durch ihre F.T. eindeutig bestimmt. Die Vorschrift für die Rücktransformation gibt uns der folgende Satz.

A.1.6 Satz (Umkehrformel von Lévy)
Sei X eine Zufallsgröße mit Verteilung Q, Verteilungsfunktion F und F.T. φ. Dann gilt

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{2\pi i t} \varphi(t) dt = \mathbb{P}\left(a < X < b\right) + \frac{\mathbb{P}\left(X = a\right) + \mathbb{P}\left(X = a\right)}{2}. \tag{A.1.2}$$

Beweis. ☞ [5], 41.7 auf S. 212 ff. □

Bemerkung. Im Falle $\lambda\!\!\lambda$-stetiger Verteilungen hat die Umkehrformel offenbar die Form

$$F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{2\pi i t} \varphi(t) dt.$$

Ob eine Verteilung stetig ist, lässt sich auch anhand ihrer F.T. entscheiden und zwar folgt die Stetigkeit aus der $\lambda\!\!\lambda$-Integrierbarkeit der Fouriertransformierten. Die Dichtefunktion

f der stetigen Verteilung ist dann für alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt$$

gegeben und die F.T. der Verteilung an der Stelle $t \in \mathbb{R}$ lässt sich aus dieser vermöge

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

errechnen (☞ [5], S. 214).

Im d-arithmetischen Fall ($d > 0$) hat die Umkehrformel die folgende, einfachere Form.

A.1.7 Satz
Sei X eine Zufallsgröße mit Werten in $d\mathbb{Z}$ und F.T. φ. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{d}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} e^{-ikt} \varphi(t) dt \tag{A.1.3}$$

für alle $k \in d\mathbb{Z}$.

Beweis. Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten wir für alle $k \in d\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} e^{-ikt} \varphi(t) dt &= \sum_{n \in d\mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(X = n\right) \frac{d}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} e^{-ikt} e^{int} dt \\ &= \sum_{n \in d\mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(X = n\right) \left(\frac{e^{i\pi(n-k)/d} - e^{-i\pi(n-k)/d}}{2\pi i(n-k)/d} \right) \\ &= \sum_{n \in d\mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(X = n\right) \left(\frac{\sin \pi(n-k)/d}{\pi(n-k)/d} \right) = \mathbb{P}\left(X = k\right), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile genutzt haben, dass – bei stetiger Fortsetzung von $\sin x/x$ in 0 – $\sin\big(\pi(n-k)/d\big)/\big(\pi(n-k)/d\big) = \delta_{n,k}$ gilt, da n und k beide aus $d\mathbb{Z}$ stammen und $\pi(n-k)/d$ somit in der Nullstellenmenge der Sinusfunktion liegt. □

Nun wollen wir den Zusammenhang zwischen der Arithmetizität eines Wahrscheinlichkeitsmaßes mit dem Einsstellenverhalten seiner Fouriertransformierten beleuchten.

A.1.8 Satz (Charakterisierung arithmetischer Verteilungen, s. [5], 41.15)
Sei $d > 0$ und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit Fouriertransformierter φ. Dann sind äquivalent:

(a) Q ist d-arithmetisch

(b) φ ist $\frac{2\pi}{d}$-periodisch und $d = min\{c : \varphi(t + \frac{2\pi}{d}) = \varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$

(c) $\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = 1\} = \frac{2\pi}{d}\mathbb{Z}$

(d) $\varphi(\frac{2\pi}{d}) = 1$ und $\varphi(t) \neq 1\ \forall t \in \left(0, \frac{2\pi}{d}\right)$

Beweis. Sei $X \sim Q$ und o.B.d.A. $d = 1$.
"(a) $\Rightarrow$ (b)" $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1 \Leftrightarrow e^{i(t+2\pi)X} = 1$ $\mathbb{P}$-*f.s.*. Somit gilt $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned} 2\pi &\geq d_0 := min\{c > 0 : \varphi(t + c) = \varphi(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &\geq d_1 := min\{c > 0 : \varphi(c) = 1\} \end{aligned}$$

Aus $\varphi(d_1) = \mathbb{E}[\cos(d_1 X)]$ folgt $\cos(d_1 X) = 1$ f.s. und somit $\mathbb{P}\left(X \in \frac{2\pi}{d_1}\mathbb{Z}\right) = 1$. Da X 1-arithmetisch ist, folgt $d_1 \geq 2\pi$ und damit $d_0 = d_1 = 2\pi$
"(b) $\Rightarrow$ (c)" und "(c) $\Rightarrow$ (d)" sind klar.
"(d) $\Rightarrow$ (a)" Mit demselben Argument wie oben folgt $Q(\mathbb{Z}) = 1$, also ist Q arithmetisch mit Spanne $d(Q) \geq 1$. Mittels der Implikation "(a) $\Rightarrow$ (b)" ergibt sich aber $\varphi\left(\frac{2\pi}{d(Q)}\right) = 1$ uns damit $d(Q) \leq 1$. □

Im Falle nicht-entarteter Zuwachsverteilungen ist die Periodizität der Fouriertransformierten also äquivalent dazu, dass die Zuwachsverteilung arithmetisch ist. Anderenfalls ist der Punkt 0 die einzige 1-Stelle von φ. Die einzige Singularität des Integranden aus Gleichung (Gl. 1) im Rekurrenzsatz liegt also im Punkte 0 vor. Erst im nächsten Abschnitt wird allerdings die Frage geklärt werden, ob der Ausdruck $1/(1 - \varphi(t))$ für $|t| > \delta > 0$ gleichmäßig beschränkt ist.

Zunächst erweitern wir die Aussage von Satz A.1.8 aber noch auf den Fall vollständig (nicht-)arithmetischer Verteilungen. Dabei benutzen wir die Tatsache, dass eine d-arithmetische (nichtarithmetische) Zufallsgröße X genau dann vollständig d-arithmetisch (nichtarithmetisch) ist, wenn ihre Symmetrisierung $X - Y$ d-arithmetisch (nichtarithmetisch) ist, wobei X und Y also unabhängig identisch verteilt seien (☞ [4], 26.3).

A.1.9 Korollar (Charakterisierung vollständig arithmetischer Verteilungen, vgl. [5], 47.2)
Sei $d > 0$ und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit Fouriertransformierter φ. Dann sind äquivalent:

(a) Q ist vollständig d-arithmetisch, bzw. nichtarithmetisch

(b) $\{t \in \mathbb{R} : |\varphi(t)| = 1\} = \frac{2\pi}{d}\mathbb{Z}$, bzw. $= \{0\}$

Beweis. Seien X und Y unabhängig identisch Q-verteilte Zufallsgrößen. Dann folgt das Korollar aus der Äquivalenz "(a) $\Leftrightarrow$ (c)" aus Satz A.1.8 und der Tatsache, dass nach dem Multiplikationssatz A.1.4 $|\varphi|$ die F.T. der Symmetrisierung $X - Y$ ist, denn (a) ist äquivalent zur d-Arithmetizität, bzw. Nichtarithmetizität von $X - Y$. □

A.2. Grenzverhalten der F.T.

Zunächst betrachten wir, wie sich $|\varphi(t)|$ für $t \to 0$ verhält. Die folgende Abschätzung hilft uns bei der Behandlung von Integralen, bei deren Integranden der Ausdruck $1 - \varphi(t)$ im Nenner steht.

A.2.1 Satz
Sei φ die F.T. einer nichtarithmetischen, bzw. d-arithmetischen ($d > 0$) Verteilung Q mit Varianz $\sigma^2 \in (0, \infty]$. Dann existiert für alle $a > 0$, bzw. für alle a mit $0 < a < \frac{2\pi}{d}$, eine Konstante $C > 0$, so dass

$$|1 - \varphi(t)| \geq Re\,(1 - \varphi(t)) \geq Ct^2$$

für alle $|t| \leq a$. Insbesondere gilt für alle stetigen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $|t| \in (0, a]$ dann die Abschätzung

$$\left|\frac{f(t)}{1 - \varphi(t)}\right| \leq \frac{\tilde{C}}{t^2}$$

mit $\tilde{C} = \|f\big|_{[-a,a]}\|_\infty\, C^{-1}$.

Beweis. O.B.d.A. genügt es, die Behauptung für ein beliebig kleines $\delta > 0$ anstelle von a zu verifizieren. Für $t \in (\delta, a]$ gilt nämlich $Re\big(1 - \varphi(t)\big) = 1 - Re\,\varphi(t) \geq Ct^2$ mit

$y := \sup\{Re\,\varphi(t) : t \in (\delta, a]\}$ und $C := a^{-1}(1-y) > 0$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq \delta$ gilt

$$\begin{aligned}
Re\big(1-\varphi(t)\big) &= \int (1-\cos xt)\, Q(dx) \\
&= 2\int \left(\sin^2 \frac{xt}{2}\right) Q(dx) \\
&= 2\left(\int\limits_{|x|\leq \frac{\pi}{\delta}} \left(\sin^2 \frac{xt}{2}\right) Q(dx) + \int\limits_{|x|> \frac{\pi}{\delta}} \left(\sin^2 \frac{xt}{2}\right) Q(dx) \right) \\
&\geq \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{|x|\leq \frac{\pi}{\delta}} |xt|^2\, Q(dx) \qquad \text{(A.2.1)} \\
&\geq \frac{t^2}{\pi^2} \int\limits_{|x|\leq \frac{\pi}{\delta}} x^2 Q(dx)
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon \in (0, \sigma^2)$. O.B.d.A. sei δ klein genug, dass

$$\int\limits_{|x|\leq \frac{\pi}{\delta}} x^2\, Q(dx) > \sigma^2 - \varepsilon$$

und damit

$$Re\big(1-\varphi(t)\big) \geq Ct^2$$

mit $C := 1/\pi^2(\sigma^2 - \varepsilon) > 0$ gilt. □

Bemerkung. Im Falle $\sigma^2 = \infty$ gilt sogar

$$\left| \frac{t^2}{1-\varphi(t)} \right| \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \text{(A.2.2)}$$

Wie in (A.2.1) erhalten wir nämlich

$$\begin{aligned}
|1-\varphi(t)| &\geq Re\big(1-\varphi(t)\big) \\
&\geq \frac{t^2}{\pi^2} \int\limits_{\{x:|xt|\leq\pi\}} x^2\, Q(dx)
\end{aligned}$$

und das Integral auf der rechten Seite der Ungleichung konvergiert für $t \to 0$ uneigentlich gegen ∞.

Das folgende Lemma gibt uns Auskunft darüber, wie sich der Imaginärteil der F.T.

für kleine t verhält.

A.2.2 Lemma

Für eine zentrierte Zufallsgröße X mit F.T. φ und Varianz $\sigma^2 < \infty$ gilt, gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{Im\ \varphi(t)}{t^3} \right| dt < \infty \tag{A.2.3}$$

Beweis gemäß [6]. Da der Zähler gleichmäßig durch 1 beschränkt ist, genügt es die Endlichkeit des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{Im\ \varphi(t)}{t^3} \right| dt < \infty \tag{A.2.4}$$

für beliebig kleines $\delta > 0$ zu zeigen. Wie in [5], Kapitel IV, Satz 19.13, folgert man mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dem Satz von Fubini

$$\left| \int \frac{\sin(tX)}{t^3}\, \mathrm{d}\mathbb{P} \right| = \left| \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{t^2} \left(\mathbb{P}\left(\{X > x\}\right) - \mathbb{P}\left(\{X < -x\}\right) \right) \mathrm{d}x \right|$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{Im\ \varphi(t)}{t^3} \right| dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\mathbb{E} \sin tX}{t^3} \right| dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \left| \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{t^2} \left(\mathbb{P}\left(X > x\right) - \mathbb{P}\left(X < -x\right) \right) dx \right| dt. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von

$$0 = \mathbb{E}X = \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^- = \int_0^{\infty} \left(\mathbb{P}\left(X^+ > x\right) - \mathbb{P}\left(X^- > x\right) \right) dx \tag{A.2.5}$$

ergänzen wir den Integranden mit 0 und erhöhen dadurch die Ordnung des Zählers in t.

Wir setzen die Gleichungskette fort durch

$$\begin{aligned}
\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{Im\ \varphi(t)}{t^3} \right| dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \left| \int_0^{\infty} \frac{1-\cos tx}{t^2} \left(\mathbb{P}\left(X > x\right) - \mathbb{P}\left(X < -x\right)\right) dx \right| \ dt \\
&\leq 2 \int_0^{\delta} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos tx}{t^2} \left| \mathbb{P}\left(X > x\right) - \mathbb{P}\left(X < -x\right)\right| dx\ dt \\
&\leq 2 \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| > x\right) \int_0^{\delta} \frac{1-\cos tx}{t^2} dt\ dx
\end{aligned}$$

Nun gilt aber weiter

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} \frac{1-\cos tx}{t^2} dt &= x^2 \int_0^{\delta} \frac{1-\cos tx}{(tx)^2} dt \\
&= x \int_0^{\delta x} \frac{1-\cos \beta}{\beta^2} d\beta \leq Cx
\end{aligned}$$

mit

$$C := \int_0^{\infty} \frac{1-\cos\beta}{\beta^2} < \infty$$

Somit ergibt sich wegen

$$\int_0^{\infty} 2x\, \mathbb{P}\left(|X| > x\right) dx = \mathbb{E}X^2 < \infty$$

die Behauptung vermöge

$$\begin{aligned}
\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{Im\ \varphi(t)}{t^3} \right| dt &\leq 2 \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| > x\right) \int_0^{\delta} \frac{1-\cos tx}{t^2} dt\ dx \\
&\leq \int_0^{\infty} 2Cx\mathbb{P}\left(|X| > x\right)\ dx \leq C\, \mathbb{E}X^2 < \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Auskunft darüber, wie sich die Fouriertransformierte für $t \to \infty$ verhält, gibt uns das Riemann-Lebesgue-Lemma. Betrachten wir zunächst die F.T. integrierbarer Funktionen:

A.2.3 Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma für L_1-Funktionen, s. [5], 41.18)
Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ gilt:

$$\lim_{|t|\to\infty} \hat{f}(t) = 0 \tag{A.2.6}$$

Beweis. 1.Fall: $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Die F.T. lässt sich in diesem Falle leicht berechnen:

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[a,b]} e^{itx} dx = \frac{1}{it}\left(e^{itb} - e^{ita}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to \infty$$

2.Fall: $f \in L_1$ beliebig. Dann gibt es wegen der absoluten Integrierbarkeit von f Intervalle I_1, ..., I_n und Konstanten c_1, ..., c_n, so dass sich f durch die im ersten Fall behandelten einfachen Funktionen approximieren lässt:

$$\|f - \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{I_j}\|_1 < \varepsilon$$

Allgemein gilt für Funktionen $g \in L_1$ die triviale Abschätzung

$$\left|\hat{f}(t) - \hat{g}(t)\right| \leq \|f - g\|_1$$

Die Intervalle I_j seien o.B.d.A. von der Form $[a_j, b_j]$ mit a_j und b_j aus $\mathbb{R}$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$. Bezeichnen wir nun mit g den Ausdruck $\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{I_j}$ erhalten wir also die Abschätzung gegen ε für beide Seiten der Ungleichung. Wie im ersten Fall nachvollzogen gilt weiter

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{ib_j t} - e^{ia_j t}}{it} \longrightarrow 0 \;\text{ für } t \to \infty$$

Damit folgt schließlich $\hat{f}(t) \to 0$. $\square$

Damit ist zugleich das asymptotische Verhalten der Fouriertransformierten $\lambda\!\!\lambda$-stetiger Maße erklärt, die nach dem Satz von Radon Nikodym eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte f besitzen, deren F.T. $\hat{f}$ gleichzeitig die F.T. des Maßes bildet.

Nun interessieren wir uns dafür, welche Verteilungen die Cramersche Bedingung

$$\limsup_{|t|\to\infty} \varphi(t) < 1, \tag{A.2.7}$$

erfüllen, denn aus dieser gewinnen wir die gleichmäßige Beschränktheit des Ausdrucks $\left|1/\big(1-\varphi(t)\big)\right|$ für $|t| > \delta > 0$. Hinreichend für die Cramersche Bedingung ist die Quasi-Stetigkeit einer Verteilung Q (s. [2], nach Satz 13.2.1), die insbesondere im Falle einer Verteilung mit $\lambda\!\!\!\lambda$-stetiger Komponente vorliegt.

A.2.4 Definition (Quasi-$\lambda\!\!\!\lambda$-Stetigkeit)
Ein Maß Q heißt quasi-$\lambda\!\!\!\lambda$-stetig, falls eine der Faltungen $(Q^{*(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ einen $\lambda\!\!\!\lambda$-stetigen Anteil besitzt, d.h., falls

$$Q^{*(n)} = q_n \lambda\!\!\!\lambda + \tilde{Q}$$

für eine Dichtefunktion $q_n \geq 0$ und ein Maß $\tilde{Q}$ mit $\|\tilde{Q}\| < 1$.

Aus dieser Eigenschaft folgt mit Hilfe des Riemann-Lebesgue-Lemmas

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\varphi^n(t)| \leq \|\tilde{Q}\| + \lim_{|t|\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itx} q_n(x) \lambda\!\!\!\lambda(dx) \right| < 1$$

und somit die Cramersche Bedingung. Darüberhinaus ist Q dann sogar vollständig nichtarithmetisch, wie man leicht nachweist, indem ausnutzt, dass die Symmetrisierung einer Zufallsgröße X mit F.T. φ die F.T. $|\varphi|$ besitzt und somit ebenso streng nichtarithmetisch ist.

Bemerkung. Kombinieren wir die Cramersche Bedingung mit Satz A.1.9, so erhalten wir, dass für jede streng nichtarithmetische Verteilung

$$\sup_{|t|>\delta} |\varphi(t)| < 1 \tag{A.2.8}$$

für jedes $\delta > 0$ gilt. Insbesondere gilt

$$\sup_{|t|>\delta} \left| \frac{1}{1-\varphi(t)} \right| < \infty. \tag{A.2.9}$$

B. Begleitende Rechnungen und Beweise

B.1. Beweis von Lemma 4.2.1

Zunächst liefern wir ein technisches Lemma, das wir auch in B.3 benötigen werden. Anschließend erfolgt der Beweis von Lemma 4.2.1.

B.1.1 Lemma
Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt = \pi$$

Beweis. Gemäß [9], S. 1083, (21.16) gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt = 4 \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} dt = \pi.$$

□

Beweis von Lemma 4.2.1. Sei o.B.d.A. $J(f) = 1$. Zu zeigen ist

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1} \lim_{s\uparrow 1} \frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(yt)\hat{f}(-t)}{1 - s\varphi(t)} \varphi(\theta) dt = 2\sigma^{-2},$$

wobei der Limes in s gemäß Lemma 3.1.2 für alle y existiert.
Zerlege den Grenzwert $s \uparrow 1$ des Ausdrucks auf der linken Seite der Gleichung in

$$u_\delta(y) + v_\delta(y)$$

mit

$$u_\delta(y) = \frac{1}{y\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(yt)\hat{f}(-t)}{1-\varphi(t)} \varphi(t) dt \tag{B.1.1}$$

und

$$v_\delta(y) = \frac{1}{y\pi} \int\limits_{|t|>\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(yt)\hat{f}(-t)}{1-\varphi(t)} \varphi(t)dt \tag{B.1.2}$$

Zunächst sieht man ein, dass wegen

$$\left| \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(yt)\hat{f}(-t)}{1-\varphi(t)} \varphi(t) \right| \leq \frac{|\hat{g}(t)| + |\hat{f}(t)|}{|1-\varphi(t)|}$$

und $f, g \in \mathfrak{F}$ das uneigentliche Integral im Ausdruck von v_δ existiert und unabhängig von y beschränkt ist und dass folglich $\lim_{y\to\infty} v_\delta(y) = 0$.
Untersuchen wir nun u_δ.

1.Fall: $\sigma^2 = \infty$. Gemäß (A.2.2) können wir zu $\varepsilon > 0$ ein genügend kleines $\delta > 0$ wählen, so dass $\left|t^2/(1-\varphi(t))\right| \leq \varepsilon/2$ für alle $|t| < \delta$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\limsup_{y\to\infty} |u_\delta(y)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t) - \cos(yt)\hat{f}(-t)}{t^2} \varphi(t)dt \\
&= \frac{\varepsilon}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\big(1+O(t^2)\big)\big(1-\cos(yt)\big)}{t^2} \varphi(t)dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\pi} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\big(1-\cos(yt)\big)}{t^2} dt \\
&= \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\big(1-\cos(t)\big)}{t^2} dt = \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang zur dritten Zeile den Term $O(t^2)\big(1-cos(yt)\big)\varphi(t)/t^2$, der im Integral auftaucht, vernachlässigen können. In der letzten Zeile wurde die Substitution $t \to yt$ durchgeführt. Damit ist Teil (b) des Satzes für den Fall $\sigma^2 = \infty$ bewiesen.

2. Fall: $\sigma^2 < \infty$. Aus Satz A.1.5 folgt

$$\left| \frac{t^2}{1-\varphi(t)} - \frac{2}{\sigma^2} \right| < \varepsilon \text{ für alle } |t| < \delta \tag{B.1.3}$$

für ein geeignet kleines $\delta > 0$. Wir erhalten aus (3.2.1) und der Taylornäherung $\varphi(t) =$

$1 + O(t^2)$ $(\sigma^2 < \infty)$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{y\to\infty} u_\delta(y) \\
=&\limsup_{y\to\infty} \frac{1}{y\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\hat{g}(-t)J(f) - \cos(yt)\hat{f}(-t)}{1-\varphi(t)}\varphi(t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta}\big(1-\cos(yt)\big)\left(\frac{2}{\sigma^2 t^2} - \frac{2}{\sigma^2 t^2}\right)dt\right) \\
\leq&\limsup_{y\to\infty} \frac{1}{y\pi}\frac{2}{\sigma^2}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\cos(yt)}{t^2}dt + \limsup_{y\to\infty}\frac{1}{y\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\big(1-\cos(yt)\big)\left|\frac{2}{\sigma^2 t^2} - \frac{1+O(t^2)}{1-\varphi(t)}\right| dt \\
=:&I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Wegen

$$I_1 = \frac{2}{\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{2}{\sigma^2}$$

bleibt nur zu zeigen, dass I_2 verschwindet, was wir mit Hilfe von (B.1.3) tun wollen: Es gilt

$$t^2 \cdot \left|\frac{2}{\sigma^2 t^2} - \frac{1+O(t^2)}{1-\varphi(t)}\right| \quad\leq\quad \left|\frac{t^2}{1-\varphi(t)} - \frac{2}{\sigma^2}\right| + \left|\frac{O(t^4)}{1-\varphi(t)}\right| < \varepsilon$$

für $t \to 0$ und nach Wahl genügend kleiner Integrationsgrenzen erhalten wir

$$I_2 \leq \limsup_{y\to\infty}\frac{\varepsilon}{y\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\big(1-\cos(yt)\big)}{t^2}dt = \varepsilon.$$

$\square$

B.2. Beweis von Lemma 4.2.4

Beweis von Lemma 4.2.4. Gemäß Satz A.1.2 ist h_s auf $[-\delta, \delta]$ stetig und aus Satz A.2.1 folgt die stetige Fortsetzbarkeit von h in 0 und somit $h_s, h \in L_1(\mathbb{R})$ für alle $s \in (0,1)$. Mit Satz A.2.1 folgern wir weiter

$$|h(t) - h_s(t)| = \left|\frac{t^2}{1-\varphi(t)} - \frac{t^2}{1-s\varphi(t)}\right| = \left|\frac{t^2\,(1-s)\varphi(t)}{\big(1-\varphi(t)\big)\big(1-s\varphi(t)\big)}\right|$$

$$\leq C\left|\frac{(1-s)\varphi(t)}{1-s\varphi(t)}\right| = C\left|\frac{(1-s)\varphi(t)}{(1-s)\varphi(t)+\big(1-\varphi(t)\big)}\right|$$

mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\gamma \in (0, \delta)$ beliebig. Nun existiert, weil φ die F.T. eines nichtaritmetischen RWs ist, ein $K > 0$ mit $|1 - \varphi(t)| \geq K$ für alle $|t| \in [\gamma, \delta]$. Daher gibt es ein $s_0 \in (0, 1)$, so dass für alle $s_0 < s < 1$ und $|t| \in [\gamma, \delta]$

$$C\left|\frac{(1-s)\varphi(t)}{(1-s)\varphi(t)+\big(1-\varphi(t)\big)}\right| \leq C\left|\frac{(1-s)\varphi(t)}{K/2}\right|$$

gilt. Nach eventueller Vergrößerung von s_0 folgt, dass weiter

$$C\left|\frac{(1-s)\varphi(t)}{K/2}\right| \leq (1-s)\,2C/K \leq \frac{1}{2(\delta-\gamma)}\,\frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $|t| \in [\gamma, \delta]$ und somit

$$\int\limits_{\{|t|\in[\gamma,\delta]\}} |h(t) - h_s(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $s_0 < s < 1$ gilt.

Nach einfacher Abschätzung folgt bei Wahl eines genügend kleinen $\gamma > 0$ außerdem

$$\int\limits_{-\gamma}^{\gamma} |h(t) - h_s(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $1/2 < s < 1$ und damit die Behauptung. □

B.3. Rechnungen aus dem Beweis von Lemma 4.2.8

Aussage 1

Behauptung: Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.2.8 gilt

$$\lim_{|y|\to\infty}\left[\frac{Af(y)-Af(0)}{y} - \frac{J(f)}{2\pi y}\int\limits_{-1}^{1} Re\left(\frac{1-e^{iyt}}{1-\varphi(t)}\right)dt\right] = 0.$$

Beweis. Beim Vollziehen des Grenzübergangs $|y| \to \infty$ können wir, wie der Leser einfach verifizieren kann, o.B.d.A. zu einem beliebig kleinen Integrationsintervall $[-\delta, \delta]$ übergehen. Beachten wir weiter, dass

$$\lim_{|y|\to\infty}\left|\frac{1}{y}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{O(t^2)}{1-\varphi(t)}dt\right|=0 \tag{B.3.1}$$

aus der Endlichkeit des in diesem Ausdruck auftauchenden Integrals folgt, so erhalten wir unter Verwendung der Taylornäherungen $\hat{f}(-t)=J(f)-iK(f)t+O(t^2)$ und $\varphi(t)=1+O(t^2)$ (letztere ist durch das Verschwinden des ersten Momentes von Q begründet)

$$\begin{aligned}
&\lim_{|y|\to\infty}\left|\frac{Af(y)-Af(0)}{y}-\frac{J(f)}{2\pi y}\int_{-1}^{1}Re\left(\frac{1-e^{iyt}}{1-\varphi(t)}\right)dt\right|\\
&=\lim_{|y|\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}Re\left(\frac{(1-e^{iyt})\,(J(f)-iK(f)t)}{1-\varphi(t)}\right)dt-\frac{J(f)}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}Re\left(\frac{1-e^{iyt}}{1-\varphi(t)}\right)dt\right|\\
&=\lim_{|y|\to\infty}\left|-\frac{J(f)}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}Re\left(\frac{(1-e^{iyt})iK(f)t}{1-\varphi(t)}\right)dt\right| \qquad\qquad \text{(B.3.2)}\\
&=\lim_{|y|\to\infty}\left|\frac{J(f)}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{K(f)t\,Im\left((1-e^{iyt})\overline{(1-\varphi(t))}\right)}{|1-\varphi(t)|^2}dt\right|\\
&=\lim_{|y|\to\infty}\left|\frac{J(f)}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}\left(\frac{K(f)t\,(1-\cos(yt))Im\,\varphi(t)}{|1-\varphi(t)|^2}-\frac{K(f)t\,\sin(yt)Re\,(1-\varphi(t))}{|1-\varphi(t)|^2}\right)dt\right|,
\end{aligned}$$

wobei die Näherungen für $\hat{f}$ und φ beim Übergang zur zweiten Zeile verwendet wurden. Dort wurde auch (B.3.1) verwendet. Die vollständige zweite Zeile lautet

$$\lim_{|y|\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}Re\left(\frac{(1-e^{iyt})\left(J(f)-iK(f)t+O(t^2)\right)(1+O(t^2))}{1-\varphi(t)}\right)dt-...\right|$$

wobei sich die Terme der Ordnung $O(t^2)$ und höherer Ordnung zusammenfassen lassen und beim Grenzübergang $|y|\to\infty$ verschwinden.

Wir zeigen, dass der Ausdruck in (B.3.2) verschwindet und untersuchen hierfür die zwei Integrale, die durch Integration jeweils eines Termes aus der Differenz, aus der der Integrand am Ende der Umformung besteht, entstehen. Bei Wahl einer geeigneten Konstanten $C>0$ können wir unter Anwendung von Lemma A.2.1 den ersten Term des

Integranden majorisieren:

$$\left|\frac{K(f)t\left(1-\cos(yt)\right)Im\,\varphi(t)}{|1-\varphi(t)|^2}\right| \leq C\left|\frac{t\,Im\,\varphi(t)}{t^4}\right|$$

Hierbei steckt in der Konstanten C bereits die Abschätzung des Termes $K(f)\big(1-\cos(yt)\big)$ gegen $2K(f)$. Der Term auf der rechten Seite der Gleichung ist nun aber gemäß Lemma A.2.2 $\lambda\!\!\lambda$-integrierbar. Hieraus folgt insbesondere

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{J(f)}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta} Re\left(\frac{K(f)t\left(1-\cos(yt)\right)Im\,\varphi(t)}{|1-\varphi(t)|^2}\right)dt = 0$$

Weiter gilt für den zweiten Term, der im Integranden am Ende der Umformung (B.3.2) auftaucht

$$\left|\frac{K(f)t\,\sin(yt)Re\big(1-\varphi(t)\big)}{|1-\varphi(t)|^2}\right| \leq C\left|\frac{t\,\sin(yt)}{t^2}\right| \leq C\,|y|$$

für alle $t \neq 0$ und eine geeignete Konstante $C > 0$. Nach stetiger Fortsetzung in 0 lässt sich der Integrand also für alle $t \in \mathbb{R}$ gegen $C\,|y|$ abschätzen. Hieraus folgt für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ durch Wahl hinreichend kleiner Integrationsgrenzen (etwa $\delta = \varepsilon(2C)^{-1}$)

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{J(f)}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{K(f)t\,\sin(yt)Re\big(1-\varphi(t)\big)}{|1-\varphi(t)|^2}dt < \varepsilon.$$

Die Veränderung der Integrationsgrenzen ist zulässig, weil dadurch das Grenzwertverhalten nicht beeinflusst wird. $\square$

Aussage 2

Behauptung: Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.2.8 (also insbesondere unter der Annahme, dass $\sigma^2 < \infty$) gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi y}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\cos y\theta)Re(1-\varphi(\theta))+\sin y\theta Im\varphi(\theta))}{|1-\varphi(\theta)|^2}d\theta = \pm\sigma^{-2}. \tag{B.3.3}$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den zweiten Summanden. Aus (A.2.4) folgt leicht

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{2\pi y} \int_{-1}^{1} \frac{\sin y\theta \; Im\, \varphi(\theta)}{|1-\varphi(\theta)|^2} d\theta = 0. \tag{B.3.4}$$

Schätze dazu wie gewohnt den Integranden ab:

$$\begin{aligned} \frac{|\sin y\theta Im\varphi(\theta)|}{|1-\varphi(\theta)|^2} &\leq C\left|\frac{\sin y\theta Im\, \varphi(\theta)}{\theta^4}\right| \\ &\leq C\,|y| \left|\frac{Im\varphi(\theta)}{\theta^3}\right|, \end{aligned}$$

wobei wir o.B.d.A. vor dem Grenzübergang $|y| \to \infty$ das Integral über $[-\delta, \delta]$ für beliebiges aber festes $\delta > 0$ betrachten können und δ dabei zu beliebigem $\varepsilon > 0$ hinreichend klein wählen, so dass

$$C \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{Im\varphi(\theta)}{\theta^3}\right| < \varepsilon$$

Kümmern wir uns nun um den ersten Summanden in (B.3.3). Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{2\pi y} \int_{-1}^{1} \frac{\big(1-\cos(yt)\big) Re(1-\varphi(t))}{|1-\varphi(t)|^2} dt \\ = \;&\lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{2\pi y} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1-\cos(yt)}{t^2} Re\left(\frac{t^2}{1-\varphi(t)}\right) dt = \pm\sigma^{-2}, \end{aligned}$$

wobei der Übergang zum Integrationsintervall $[-\delta, \delta]$ erlaubt ist, da das Integral außerhalb der Grenzen $[-\delta, \delta]$ in y gleichmäßig beschränkt ist und gesamte der Term daher bei der Limesbildung $|y| \to \infty$ verschwindet.

Hierbei wählen wir $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass

$$\left|\frac{t^2}{1-\varphi(t)} - \frac{2}{\sigma^2}\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } 0 < t < \delta$$

und daher

$$\left|\frac{1-\cos(yt)}{t^2}\left(Re\left(\frac{t^2}{1-\varphi(t)}\right) - \frac{2}{\sigma^2}\right)\right| \;\leq\; \varepsilon\, \frac{1-\cos(yt)}{t^2},$$

gilt. Folglich gilt wegen

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\cos(yt)}{t^2}Re\left(\frac{t^2}{1-\varphi(t)}\right)dt\\
=\;&\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi y}\left(\frac{2}{\sigma^2}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\cos(yt)}{t^2}dt+\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\cos(yt)}{t^2}\left(Re\left(\frac{t^2}{1-\varphi(t)}\right)-\frac{2}{\sigma^2}\right)dt\right)\\
\approx\;&\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\cos(yt)}{t^2}dt
\end{aligned}$$

für $\delta\downarrow 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi y}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\cos(yt)}{t^2}Re\left(\frac{t^2}{1-\varphi(t)}\right)dt\\
&=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{\pi y\sigma^2}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\cos(yt)}{t^2}dt \qquad \text{(B.3.5)}\\
&=\frac{\pm 1}{\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt=\pm\sigma^{-2}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde dabei die Substitution $yt\to t$ vollzogen. □

Stichwortverzeichnis

Symbolverzeichnis

$Af(x)$	Potentialkern, $\lim_{s\uparrow 1} A^s f(x)$
$A^s f(x)$	diskontierter Potentialkern, $c^s J(f) - U^s f(x)$
$B - x$	$\{y - x : y \in \mathcal{B}\}$, wobei $B \in \mathcal{B}$ und $x \in \mathbb{R}$
$\mathcal{B}^d$	Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$
$B_\varepsilon(x)$	ε-Ball um x, $\{y \in \mathbb{R} : \lvert y - x\rvert < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$
$\mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$	Menge der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger
$\mathfrak{C}_0$	$\mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$
$\mathfrak{C}_b(\mathbb{R})$	Menge der beschränkten stetigen Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
c^s	$U^s g(0)$, wobei $g \in \mathfrak{F}^+$ mit $J(g) = 1$ und $K(g) = 0$ fest gewählt ist
$Df(x)$	$\lim_{s\uparrow 1} D^s f(x)$
$D^s f(x)$	$A^s f(x) + d^s\,(xJ(f) - K(f))$
d^s	$s/2\pi \int_{-1}^{1} it/(1 - s\varphi(t))dt$
$\mathfrak{D}(\varphi)$	Definitionsbereich der Fouriertransformierten φ
$\Delta_x(y)$	$Af(y) - Af(y - x)$
δ_x	Diracmaß im Punkte $x \in \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$
$\mathfrak{E}$	Menge der erreichbaren Punkte
$\mathbb{E}$	Erwartungswertoperator
$\mathbb{E}_x$	Erwartungswertoperator, der zu einem RW mit Startwert x gehört
$\lVert f\rVert_\infty$	$\sup\{\lvert f(t)\rvert : t \in \mathbb{R}\}$ $(f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$
$\lVert f\rVert$	$\lVert f\rVert_\infty$
$\mathfrak{F}$	Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, deren F.T. absolut integrierbar ist
$\mathfrak{F}^+$	Menge der nichtnegativen $f \in \mathfrak{F}$
$*$	Faltungsoperator
$\mathfrak{F}_n$	Kanonische Filtration $\sigma(S_0, ..., S_n)$
$G_B^s f(x)$	$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} s^n f(S_n)\right]$
$G_B^s(x, \cdot\,)$	$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} s^n\, \mathbb{1}_{\{S_n \in\, \cdot\,\}}\right]$
$G_B(x, \cdot\,)$	Präokkupationsmaß $\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_B} \mathbb{1}_{\{S_n \in \cdot\}}\right]$, bzw. $\lim_{s\uparrow 1} G_B^s(x, \cdot\,)$

$\mathbb{G}_0$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{G}_d$	$d\mathbb{Z}$ $(d > 0)$
$\mathbb{G}_\infty$	$\{0\}$
$id_\mathbb{R}$	Identität auf $\mathbb{R}$
$J(f)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, wobei $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$
$K(f)$	$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, wobei $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$
$L_B^s(x)$	$c^s \left(1 - \mathbb{E}_x s^{T_B}\right)$ $(x \in \mathbb{R})$
$L_1(\mathbb{R})$	Raum der $\lambda\!\!\!\lambda$-integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\lambda\!\!\!\lambda$	Lebesgue-Maß
$N(B)$	zufälliges Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in (0, \infty)$
$\nu \otimes \lambda$	Produktmaß von ν und λ
$\mathbb{P}_x^{S_n}$	Verteilung von S_n bei gegebenem RW mit Startwert x
$\Pi_B^s f(x)$	$\mathbb{E}_x \left[s^{T_B} f(S_{T_B})\right]$
$\Pi_B^s(x, \cdot)$	$\mathbb{E}_x \left[s^{T_B}\, \mathbb{1}_{\{S_{T_B} \in\ \cdot\ \}}\right]$
Π_B	$\lim_{s \uparrow 1} \Pi_B^s$
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\mathfrak{R}$	Menge der Rekurrenzpunkte
U_λ^s	diskontiertes Erneuerungsmaß, $\sum_{n \geq 0} s^n \mathbb{P}_\lambda^{S_n}$
U_λ	Erneuerungsmaß eines RWs mit Startverteilung λ, $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_\lambda^{S_n}$
U_x	Erneuerungsmaß eines RWs mit Startverteilung δ_x
$\mathfrak{W}(\mathbb{G}_d)$	Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{G}_d$ $(d \in [0, \infty])$
$\mathfrak{W}_d$	$\mathfrak{W}(\mathbb{G}_d)$

Literaturverzeichnis

[1] Gerold Alsmeyer, *Markov-Erneuerungstheorie: Unveröffentlichtes Vorlesungsskript.*

[2] ______, *Erneuerungstheorie*, B.G. Teubner Stuttgart, 1991.

[3] ______, *Recurrence Theorems For Markov Random Walks*, Probability And Mathematical Statistics, vol. 21, Institut für Mathematische Statistik, WWU Münster, 2000.

[4] ______, *Stochastische Prozesse, Teil 1 - Diskrete Markov-Ketten, Martingale und Erneuerungstheorie*, 3rd ed., Gerold Alsmeyer, 2005.

[5] ______, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4th ed., 2005.

[6] ______, *Begleitende Beweise zur Diplomarbeit: unveröffentlicht*, 2010.

[7] Yuan Shih Chow and Henry Teicher, *Probability Theory*, Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag, 1978.

[8] Otto Forster, *Analysis I*, 7th ed., vieweg studium - Grundkurs Mathematik, vieweg, 2004.

[9] I.N. Bronstein et al., *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, 2001.

[10] Olav Kallenberg, *Probability and its Applications* (T.G. Kurtz J. Gani C.C. Heyde, ed.), Springer-Verlag, 2001.

[11] D.S. Ornstein, *Random Walks. I*, Vol. I, Trans. Amer. Math. Soc., 1967.

[12] Frank Spitzer, *Principles of Random Walk*, Springer-Verlag, 1976.

[13] Charles J. Stone, *On the Potential Operator for one-dimensional recurrent Random Walks*, Vol. 136, American Mathematical Society, 1969.

Eigenständigkeitserklärung

Gemäß $ 21 Absatz (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Till Breuer, Münster, 30. Juni 2010